Determinantes
e Produto Exterior
sem Permutações

Armando Machado

Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências

Universidade de Lisboa

2022

2020 Mathematics Subject Classification: 15-01, 15A15, 15A75
ISBN 978–972–8394–32–5

Agradecimentos

Quero tornar público o meu reconhecimento à colega Cecília Ferreira que, generosamente, se dispôs a efetuar uma leitura atenta e crítica da primeira versão deste texto, leitura que, em particular, me permitiu encontrar, e emendar, um número muito elevado de “gralhas”.
Agradeço também a revisão feita pelo autor do parecer científico. As suas observações permitiram-me corrigir um número importante de imperfeições ao nível da linguagem utilizada e da pontuação e convenceram-me a limitar alguns excessos de coloquialidade que estariam eventualmente presentes.

ÍNDICE

§1. Introdução

O determinante de uma matriz com n linhas e n colunas é frequentemente definido como uma soma de $n!$ parcelas, indexada no conjunto das permutações do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$, cada parcela sendo um produto de n termos da matriz pertencentes a linhas e colunas distintas multiplicado pelo sinal da permutação envolvida na escolha da coluna associada a cada linha. A definição é naturalmente precedida dos estudo do grupo das permutações, em particular da definição do sinal de uma permutação e da propriedade essencial do sinal, nomeadamente o teorema de Bézout.

Uma definição alternativa do determinante, menos algorítmica e mais natural, consiste em estabelecer a existência de uma única forma multilinear alternada sobre as colunas da matriz (ou, alternativamente, sobre as respectivas linhas) que tome o valor 1 na matriz identidade; o determinante da matriz é então o valor dessa aplicação multilinear aplicada às colunas da matriz. O estudo do grupo das permutações e do sinal destas continua, no entanto, a ser utilizado na prova do resultado de existência e unicidade referido.

É também comum uma definição recursiva do determinante que utiliza o desenvolvimento de Laplace relativamente a uma das linhas, para fixar ideias a primeira. É então necessário mostrar que o desenvolvimento de Laplace relativamente a outra linha ou relativamente a qualquer das colunas é ainda válido e, para isso, as permutações e o respectivo sinal continuam a ser utilizados.

O ponto de partida deste texto foi explorar a possibilidade de, combinando a segunda e a terceira via referidas atrás, definir o determinante e provar as suas propriedades usuais dispensando completamente o estudo do grupo das permutações e, em particular, a noção geral de sinal de uma permutação. É claro que certas permutações particulares vão aparecer, quanto mais não seja na propriedade usual da alternância de uma aplicação multilinear, mas nesses casos o que joga o papel do sinal é definido de maneira *ad hoc*.

Por razões de maneabilidade, e também de gosto pessoal, o determinante começa por ser definido para um sistema de n vectores de um espaço vectorial de dimensão n, onde se considera fixada uma base, e o determinante de uma matriz do tipo $n \times n$ aparece posteriormente como o caso particular em que o espaço vectorial é o das matrizes coluna e os vectores são as colunas da matriz. Neste contexto, a definição do determinante é feita a partir de um resultado de existência e unicidade cuja demonstração utiliza um lema simples, a que chamámos "lema do desenrascanço", que estabelece, para um espaço vectorial E de dimensão n e um subespaço vectorial $F \subset E$ de dimensão 1, a existência de um isomorfismo entre o espaço vectorial das formas alternadas com n variáveis em E e o espaço vectorial das formas alternadas com $n-1$ variáveis no espaço vectorial quociente $\frac{E}{F}$. Intimamente relacionada com a noção de determinante de um sistema de n vectores (associado a uma base fixada), é também estudada a noção de determinante de um endomorfismo linear, noção que já não depende da fixação de uma base.

Há, naturalmente, situações em que certas propriedades se revelam mais naturais no contexto das matrizes, como aquela que afirma que uma matriz e a sua transposta têm o mesmo determinante, e, nessas situações, é no contexto das matrizes que elas começam por ser examinadas.

Em geral, os espaços vectoriais que serão considerados são espaços vectoriais sobre um corpo arbitrário $\mathbb{K}$, sem restrição portanto quanto à característica do corpo, e, do mesmo modo, as matrizes são consideradas como tendo os seus termos nesse corpo $\mathbb{K}$.

Há também situações em que é conveniente considerar num mesmo contexto espaços vectoriais sobre dois corpos distintos, mais precisamente sobre um corpo $\mathbb{K}_c$ e um subcorpo $\mathbb{K}_r \subset \mathbb{K}_c$, onde a notação utilizada serve para lembrar o caso mais frequente em que $\mathbb{K}_c$ é o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos e $\mathbb{K}_r$ é o subcorpo $\mathbb{R}$ dos números reais. Numa situação deste tipo, todo o espaço vectorial sobre $\mathbb{K}_c$ é trivialmente também um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}_r$ (em geral com dimensão distinta) e, no sentido oposto, toda a matriz com termos em $\mathbb{K}_r$ é também uma matriz com termos em $\mathbb{K}_c$. Uma das razões para considerar uma situação deste tipo reside no facto de, quando E é um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}_r$ e F um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}_c$ (e portanto também sobre $\mathbb{K}_r$), o conjunto $L(E;F)$ das aplicações lineares $E \to F$ ter uma estrutura natural de espaço vectorial sobre $\mathbb{K}_c$; em particular, quando E tem dimensão n, podemos considerar o dual $E^* = L(E;\mathbb{K}_r)$ com dimensão n sobre $\mathbb{K}_r$ e, simultaneamente, o dual estendido $L(E;\mathbb{K}_c)$ ainda de dimensão n mas agora sobre $\mathbb{K}_c$.

Outra situação pontual em que foi útil a alteração do corpo com que se está a trabalhar foi no estudo do polinómio característico de uma matriz com termos num corpo finito $\mathbb{K}_r$: Nesse caso o polinómio característico não fica determinado pela função polinomial associada e, para podermos utilizar esta função polinomial no estudo daquele, tirámos partido de considerar a matriz como tendo termos num corpo infinito $\mathbb{K}_c$ do qual $\mathbb{K}_r$ é subcorpo, por exemplo no corpo das frações racionais com coeficientes em $\mathbb{K}_r$.

O lema do desenrascanço acima referido admite uma generalização, cuja demonstração só marginalmente tem que ser modificada, que permite estudar, mais geralmente, para um espaço vectorial E de dimensão n e uma base fixada nesse espaço, uma base do espaço das formas alternadas com $p \leq n$ variáveis indexada no conjunto das partes de $\{1, 2, \ldots, n\}$ com p elementos. Essa generalização permite estudar esses espaços, em particular definir a operação de produto exterior de uma forma alternada com p variáveis por uma com q variáveis, que conduz a uma forma alternada com $p + q$ variáveis, e estabelecer as propriedades de $\pm$-comutatividade e de associatividade dessa operação. As formas alternadas com um número de variáveis menor que a dimensão do espaço vão posteriormente intervir no teorema de Binet–Cauchy, sobre o determinante de um produto conveniente de matrizes retangulares, e no estudo do polinómio característico de uma matriz ou de um endomorfismo linear.

Sublinhamos, por fim, que supomos que o leitor deste texto está à vontade com as noções básicas de Álgebra Linear, em particular com os espaços vectoriais de dimensão finita, incluindo as propriedades usuais no contexto da invariância da dimensão, com as propriedades básicas das aplicações lineares entre espaços vectoriais de dimensão finita e com as relações destas com as matrizes, na presença de bases fixadas nos espaços envolvidos, assim como com os conceitos de vector próprio e valor próprio.

Apesar de esta exposição não ter uma intenção didática, enunciaremos no fim de algumas secções um conjunto de exercícios onde se propõe a prova de resultados interessantes mas que não são utilizados no seguimento.

§2. Notações e preliminares.

Nesta secção vamos introduzir algumas notações que serão utilizadas no texto e relembrar alguns factos que, apesar de estarmos a supor serem conhecidos, parecem ser suficientemente importantes para merecerem ser sublinhados. Ao introduzir certas notações, teremos também ocasião de demonstrar algumas propriedades elementares em que estas intervêm e que serão utilizadas nas secções seguintes.

2.1 Se M é uma matriz, com termos num corpo $\mathbb{K}$, do tipo $m \times n$, isto é, com m linhas e n colunas, denotaremos por M^i_j o elemento da linha i e coluna j da matriz. Neste contexto, dado $I \subset \{1, \ldots, m\}$, denotaremos por M^I a matriz que se obtém de M retirando-lhe as linhas que não estão em I e, para $J \subset \{1, \ldots, n\}$, M_J denotará a que se obtém de M retirando-lhe as colunas que não estão em J. Ainda neste contexto, denotamos por

$$M^I_J = (M^I)_J = (M_J)^I$$

a matriz duplamente amputada.

Denotaremos por $\mathcal{I}_n$, ou $\mathcal{I}$ se não houver risco de ambiguidade, a matriz identidade do tipo $n \times n$.

2.2 Se I for um conjunto finito de números naturais com p elementos, vamos denotar por $I_1, I_2, \ldots, I_p$ os elementos de I postos por ordem, isto é os definidos pela condição de se ter

$$I = \{I_1, I_2, \ldots, I_p\}, \text{com } I_1 < I_2 < \cdots < I_p.$$

Podemos, por exemplo, utilizar esta notação para redefinir mais precisamente a matriz M^I referida em 2.1: Trata-se da matriz do tipo $p \times n$ cujo elemento da linha i e coluna j é $M^{I_i}_j$.

2.3 Dado um corpo $\mathbb{K}$, podemos identificar a potência $\mathbb{K}^m$ ao espaço das matrizes coluna com m linhas e denotamos por $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ os elementos da *base canónica* deste espaço, correspondentes às matrizes coluna

$$\textbf{(1)} \qquad \mathcal{I}_{\{1\}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{I}_{\{2\}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad \mathcal{I}_{\{m\}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

respectivamente. O vector $\boldsymbol{e}_j$ é assim aquele que tem 1 na linha j e 0 nas restantes linhas.
A uma matriz M do tipo $m \times n$ associamos a sequência de n vectores de $\mathbb{K}^m$ correspondentes às matrizes coluna $M_{\{1\}}, \ldots, M_{\{n\}}$, tendo-se

$$\textbf{(2)} \qquad M_{\{j\}} = M_j^1\, \boldsymbol{e}_1 + M_j^2\, \boldsymbol{e}_2 + \cdots + M_j^m\, \boldsymbol{e}_m.$$

2.4 Por vezes, introduziremos o contexto de um resultado com a frase "Consideremos dois corpos $\mathbb{K}_r \subset \mathbb{K}_c$.". Quando o fizermos estamos a exprimir de forma abreviada que vamos considerar um corpo $\mathbb{K}_c$ e um subcorpo $\mathbb{K}_r$ de $\mathbb{K}_c$. O exemplo concreto mais comum, que explica a notação utilizada, é aquele em que $\mathbb{K}_c$ é o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos e $\mathbb{K}_r$ o subcorpo $\mathbb{R}$ dos números reais, mas outras situações são possíveis e também não afastamos a possibilidade de se ter $\mathbb{K}_r = \mathbb{K}_c$ o que, não parecendo ser uma situação extremamente interessante, tem a vantagem de não nos obrigar a duplicar enunciados, um para o caso em que lidamos com um único corpo e outro para aquele em que temos dois corpos distintos.

2.5 Como exemplo de aplicação das considerações feitas em 2.4, consideremos corpos $\mathbb{K}_r \subset \mathbb{K}_c$, um espaço vectorial E de dimensão n sobre o corpo $\mathbb{K}_r$ e um espaço vectorial F de dimensão m sobre o corpo $\mathbb{K}_c$. Uma vez que F é também naturalmente um espaço vectorial sobre o subcorpo $\mathbb{K}_r$ (eventualmente de dimensão infinita[1]), podemos considerar o espaço vectorial $L(E; F)$, cujos elementos são as aplicações lineares $\lambda\colon E \to F$, espaço esse que tem uma estrutura natural de espaço vectorial sobre $\mathbb{K}_c$. Quando considerado como espaço vectorial sobre $\mathbb{K}_c$, $L(E; F)$ tem dimensão $m \times n$, por ser isomorfo ao espaço vectorial das matrizes do tipo $m \times n$ de elementos de $\mathbb{K}_c$ (o isomorfismo fica associado à escolha de uma base de E, como espaço vectorial sobre $\mathbb{K}_r$, e de uma base de F, como espaço vectorial sobre $\mathbb{K}_c$).

2.6 **(Espaço vectorial dual)** Um caso particular do referido em 2.5 é aquele em que consideramos para F o corpo $\mathbb{K}_c$. Nesse caso, $E^* = L(E; \mathbb{K}_r)$ é o *dual* de E e a $L(E; \mathbb{K}_c)$ poder-se-ia dar o nome de *dual estendido* de E (aos seus elementos é usual dar também o nome de *formas lineares*). No caso em que E tem dimensão n, tem-se $L(E; \mathbb{K}_r) \subset L(E; \mathbb{K}_c)$ e os dois espaços vectoriais têm dimensão n, o primeiro como espaço vectorial sobre $\mathbb{K}_r$ e o

[1] No caso em que $\mathbb{K}_c = \mathbb{C}$ e $\mathbb{K}_r = \mathbb{R}$, F teria dimensão $2m$ sobre $\mathbb{K}_r$.

segundo como espaço vectorial sobre $\mathbb{K}_c$. Dada uma base $w_1, w_2, \dots, w_n$ de E, fica-lhe associada uma *base dual* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ de $L(E;\mathbb{K}_r)$, como espaço vectorial sobre $\mathbb{K}_r$, que é também uma base de $L(E;\mathbb{K}_c)$, como espaço vectorial sobre $\mathbb{K}_c$, onde as aplicações lineares $\alpha_j\colon E \to \mathbb{K}_r$ estão determinadas pelos seus valores nos elementos da base:

$$\alpha_j(w_i) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}.$$

Os elementos da base dual também podem ser chamados de *aplicações lineares coordenadas*, uma vez que, para cada $x \in E$,

(1) $$x = \alpha_1(x)w_1 + \alpha_2(x)w_2 + \cdots + \alpha_n(x)w_n.$$

Recordemos que a igualdade (1) admite uma variante que nos identifica as coordenadas de um elemento $\beta \in L(E;\mathbb{K}_c)$ na base $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$:

(2) $$\beta = \beta(w_1)\alpha_1 + \beta(w_2)\alpha_2 + \cdots + \beta(w_n)\alpha_n.$$

2.7 **(Imagem recíproca)** Consideremos corpos $\mathbb{K}_r \subset \mathbb{K}_c$, dois espaços vectoriais E e E' sobre $\mathbb{K}_r$ e uma aplicação linear $\lambda\colon E \to E'$. Podemos então considerar os espaços vectoriais $L(E;\mathbb{K}_c)$ e $L(E';\mathbb{K}_c)$ sobre $\mathbb{K}_c$ e define-se a *aplicação linear imagem recíproca*

$$\lambda^*\colon L(E';\mathbb{K}_c) \to L(E;\mathbb{K}_c), \quad \lambda^*(\beta) = \beta \circ \lambda,$$

aplicação linear essa que aplica $L(E';\mathbb{K}_r)$ em $L(E;\mathbb{K}_r)$ e cuja restrição a $L(E';\mathbb{K}_r)$ também é chamada de *aplicação linear dual*.
As aplicações lineares imagem recíproca verificam trivialmente condições naturais de contravariância, do tipo

$$(\mu \circ \lambda)^* = \lambda^* \circ \mu^*,$$

condições que implicam que, no caso em que λ é um isomorfismo, λ^* também é um isomorfismo e com inverso $(\lambda^{-1})^*$.
Suponhamos que em E se fixou uma base $w_1, \dots, w_n$ e em E' uma base $w'_1, \dots, w'_m$ e consideremos a matriz M, com m linhas e n colunas, da aplicação linear λ naquelas bases, portanto a definida por

$$\begin{aligned}
&\lambda(w_1) = M_1^1 w'_1 + M_1^2 w'_2 + \cdots + M_1^m w'_m,\\
&\lambda(w_2) = M_2^1 w'_1 + M_2^2 w'_2 + \cdots + M_2^m w'_m,\\
&\dots\\
&\lambda(w_n) = M_n^1 w'_1 + M_n^2 w'_2 + \cdots + M_n^m w'_m.
\end{aligned}$$

Considerando-se então as bases associadas $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ de $L(E;\mathbb{K}_c)$ e $\alpha'_1, \dots, \alpha'_m$ de $L(E';\mathbb{K}_c)$, vem

$$\begin{aligned}
&\lambda^*(\alpha'_1) = M^1_1\alpha_1 + M^1_2\alpha_2 + \cdots + M^1_n\alpha_n,\\
&\lambda^*(\alpha'_2) = M^2_1\alpha_1 + M^2_2\alpha_2 + \cdots + M^2_n\alpha_n,\\
&\dots\\
&\lambda^*(\alpha'_m) = M^m_1\alpha_1 + M^m_2\alpha_2 + \cdots + M^m_n\alpha_n,
\end{aligned}$$

ou seja, a matriz de $\lambda^*\colon L(E';\mathbb{K}_c) \to L(E;\mathbb{K}_c)$ nas bases associadas é a *matriz transposta* M^t da matriz M.

2.8 **(Espaço vectorial quociente) a)** Quando E é um espaço vectorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $F \subset E$ é um subespaço vectorial podemos considerar o *espaço vectorial quociente* $\frac{E}{F}$, cujos elementos são as classes de equivalência de elementos $x \in E$ para a relação de equivalência

$$x \sim x' \Leftrightarrow x' - x \in F,$$

com as operações de espaço vectorial naturalmente definidas. Neste contexto, usaremos a notação $[x]_F$ para designar a classe de equivalência de um elemento $x \in E$, como alternativa à designação mais usual $x + F$.[2] Usaremos a notação $\rho\colon E \to \frac{E}{F}$ para a *projeção canónica* no quociente, isto é, para a aplicação linear definida por $\rho(x) = [x]_F$.

b) No caso em que $w_1, \ldots, w_n$ é uma base de E tal que os últimos $n-p$ vectores $w_{p+1}, \ldots, w_n$ constituem uma base de F, os vectores

$$[w_1]_F, \ldots, [w_p]_F$$

constituem uma base do espaço vectorial quociente $\frac{E}{F}$.

c) Se E' é outro espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e $\lambda\colon E \to E'$ é uma aplicação linear tal que $\lambda_{/F} = 0$ fica bem definida uma aplicação linear $\widehat{\lambda}\colon \frac{E}{F} \to E'$ por

$$\widehat{\lambda}([x]_F) = \lambda(x),$$

que se diz ser a obtida a partir de λ por *passagem ao quociente*. Basta, com efeito, reparar que, se for $[x]_F = [x']_F$, vem $x' - x \in F$ donde

$$\lambda(x') = \lambda\big(x + (x' - x)\big) = \lambda(x) + \lambda(x' - x) = \lambda(x),$$

visto que a linearidade de $\widehat{\lambda}$ é de verificação trivial.
Em consequência do que acabamos de referir, se $F' \subset E'$ é um subespaço vectorial e $\lambda\colon E \to E'$ é uma aplicação linear tal que $\lambda(F) \subset F'$, ficamos com uma aplicação linear

$$\widehat{\lambda}\colon \frac{E}{F} \to \frac{E'}{F'}, \quad \widehat{\lambda}([x]_F) = [\lambda(x)]_{F'},$$

[2]A designação usual $x + F$ parece-nos favorecer maiores "engarrafamentos gráficos" nas fórmulas e "escancarar" uma informação que se revela pouco importante, nomeadamente a caracterização do conjunto dos elementos equivalentes a x.

que se diz também ser a obtida a partir de λ por *passagem ao quociente*.
d) No contexto de b) e c), sejam $n = p + q$ e $n' = p' + q'$ e consideremos uma base $w_1, \ldots, w_n$ de E tal que os vectores $w_{p+1}, \ldots, w_{p+q}$ constituam uma base de F e uma base $w'_1, \ldots, w'_{n'}$ de E' tal que os vectores $w'_{p'+1}, \ldots, w'_{p'+q'}$ constituam uma base de F' e consideremos as bases $[w_1]_F, \ldots, [w_p]_F$ de $\frac{E}{F}$ e $[w'_1]_{F'}, \ldots, [w'_{p'}]_{F'}$ de $\frac{E'}{F'}$ que lhes estão associadas. Nas bases referidas a matriz M de uma aplicação linear $\lambda\colon E \to E'$ para a qual $\lambda(F) \subset F'$ admite uma decomposição em blocos da forma

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix},$$

onde a matriz A é do tipo $p' \times p$, a matriz de zeros é do tipo $p' \times q$, a matriz B é do tipo $q' \times p$ e a matriz C é do tipo $q' \times q$; a matriz C é a matriz da restrição $\lambda_{/F}\colon F \to F$ e a matriz A é a matriz de $\widehat{\lambda}\colon \frac{E}{F} \to \frac{E}{F}$.

2.9 **(Traços de matrizes e de endomorfismos lineares) a)** Se M é uma matriz quadrada, com n linhas e n colunas e com termos num corpo $\mathbb{K}$, o *traço* de M, $\mathrm{Tr}(M)$, é, por definição a soma dos seus termos diagonais, portanto um elemento de $\mathbb{K}$:

$$\mathrm{Tr}(M) = M_1^1 + M_2^2 + \cdots + M_n^n.$$

Uma propriedade elementar, mas importante, do traço diz que, dadas uma matriz M com m linhas e n colunas e uma matriz P com n linhas e m colunas, as matrizes quadradas $M \times P$ e $P \times M$, em geral com diferentes dimensões, têm o mesmo traço, nomeadamente

$$\mathrm{Tr}(M \times P) = \mathrm{Tr}(P \times M) = \sum_{i,j} M_j^i \, P_i^j.$$

Esta propriedade implica, em particular, que, se M e P são *matrizes* quadradas *semelhantes*, com n linhas e n colunas, isto é, se se tem

$$P = X^{-1} \times M \times X,$$

para uma certa matriz invertível X, então M e P têm o mesmo traço.
b) Dados um espaço vectorial E de dimensão n sobre o corpo $\mathbb{K}$ e um endomorfismo linear $\lambda\colon E \to E$, define-se o seu *traço* $\mathrm{Tr}(\lambda)$ como sendo o traço da matriz de λ numa base arbitrária de E, este último não dependendo da base de E que se considera uma vez que as matrizes relativas a duas bases de E são matrizes semelhantes. No caso em que $n = 1$, tem-se $\lambda = a\, Id_E$, para um certo $a \in \mathbb{K}$, e então $\mathrm{Tr}(\lambda) = a$.
c) A definição do traço de uma matriz referida em a) implica trivialmente que se M é uma matriz quadrada, com n linhas e n colunas, a matriz M a a sua transposta M^t têm o mesmo traço. Daqui se deduz, tendo presente o referido em 2.7, que, dados dois corpos $\mathbb{K}_r \subset \mathbb{K}_c$, um espaço vectorial E de dimensão n sobre $\mathbb{K}_r$ e um endomorfismo linear $\lambda\colon E \to E$, com o corres-

pondente endomorfismo linear imagem recíproca $\lambda^*\colon L(E;\mathbb{K}_c) \to L(E;\mathbb{K}_c)$, tem-se

$$\mathrm{Tr}(\lambda^*) = \mathrm{Tr}(\lambda) \in \mathbb{K}_r.$$

2.10 **(Comportamento da dimensão quando se muda o corpo)** Consideremos dois corpos $\mathbb{K}_r \subset \mathbb{K}_c$ tais que $\mathbb{K}_c$ seja um espaço vectorial de dimensão finita k sobre $\mathbb{K}_r$.[3] Se E é um espaço vectorial de dimensão n sobre $\mathbb{K}_c$ então a dimensão de E como espaço vectorial sobre $\mathbb{K}_r$ é $k \times n$. Mais precisamente, se $(a_i)_{i\in I}$ for uma base de $\mathbb{K}_c$ como espaço vectorial sobre $\mathbb{K}_r$ e $(w_j)_{j\in J}$ for uma base de E como espaço vectorial sobre $\mathbb{K}_c$ então a família dos $a_i w_j$, com $(i,j) \in I \times J$, é uma base de E como espaço vectorial sobre $\mathbb{K}_r$.

2.11 **(Um lema com aplicação adiada)** Sejam E um espaço vectorial de dimensão $n \geq 1$ sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $\lambda\colon E \to E$ uma aplicação linear. Existem então aplicações lineares $\lambda', \lambda''\colon E \to E$, cada uma das quais admitindo um vector próprio diferente de 0, tais que $\lambda = \lambda' \circ \lambda''$.

Dem: Comecemos por fazer notar que o resultado é trivial no caso em que λ admite um vector próprio diferente de 0, visto que podemos então tomar $\lambda' = \lambda$ e $\lambda'' = Id_E$, esta última admitindo qualquer vector de E como vector próprio associado ao valor próprio 1. Fixemos agora um vector $x_0 \neq 0$ em E que, pelo que dissémos atrás, podemos já supor não ser um vector próprio de λ. Então os vectores $x_0, \lambda(x_0)$ são linearmente independentes e podemos completá-los com um conjunto de vectores de E de modo a obter uma base de E. Seja $\lambda'\colon E \to E$ o isomorfismo que aplica x_0 em $\lambda(x_0)$, aplica $\lambda(x_0)$ em x_0 e aplica cada um dos restantes vectores da base nele mesmo, isomorfismo para o qual se tem $\lambda'^{-1} = \lambda'$ e

$$\lambda'\big(x_0 + \lambda(x_0)\big) = \lambda(x_0) + x_0,$$

admitindo assim $x_0 + \lambda(x_0)$ como vector próprio diferente de 0. Tem-se agora $\lambda = \lambda' \circ \lambda''$ onde $\lambda'' = \lambda' \circ \lambda$ admite x_0 como vector próprio diferente de 0. □

2.12 **(Exercícios) 1)** Verificar que, se E é um espaço vectorial de dimensão n sobre o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos com uma base $w_1, \dots, w_n$, então E, considerado como espaço vectorial sobre o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais tem dimensão $2n$ e admite uma base constituída pelos vectores

$$w_1, \dots, w_n, iw_1, \dots, iw_n.$$

2) Sejam E um espaço vectorial de dimensão n sobre o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos e $\lambda\colon E \to E$ uma aplicação linear. Reparar que λ também é linear quando se considera E como espaço vectorial sobre o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais mas que o traço $\mathrm{Tr}(\lambda)$ depende de qual dos dois corpos se está a considerar como corpo dos escalares. Mais precisamente, dando a $\mathrm{Tr}_{\mathbb{C}}(\lambda)$ e a

[3] Diz-se então que $\mathbb{K}_c$ é uma *extensão finita de grau* k de $\mathbb{K}_r$.

$\mathrm{Tr}_{\mathbb{R}}(\lambda)$ os significados naturais, mostrar que se tem

$$\mathrm{Tr}_{\mathbb{R}}(\lambda) = 2\,\Re\big(\mathrm{Tr}_{\mathbb{C}}(\lambda)\big),$$

onde $\Re$ designa a parte real de um número complexo.
3) Sejam E um espaço vectorial de dimensão n sobre o corpo $\mathbb{K}$, $F \subset E$ um subespaço vectorial e $\lambda\colon E \to E$ uma aplicação linear tal que $\lambda(F) \subset F$ e consideremos a aplicação linear $\widehat{\lambda}\colon \frac{E}{F} \to \frac{E}{F}$ que se obtém por passagem ao quaociente. Mostrar que se tem

$$\mathrm{Tr}(\lambda) = \mathrm{Tr}(\lambda_{/F}) + \mathrm{Tr}(\widehat{\lambda}).$$

§3. Formas multilineares alternadas

3.1 **(Aplicações bilineares)** Sejam E, F, G espaços vectoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$. Diz-se que uma aplicação $\xi\colon E \times F \to G$ é *bilinear* se é separadamente linear nas duas variáveis, mais precisamente se:
1) **(Linearidade na primeira variável)** Para cada $y \in F$, é linear a aplicação

$$E \to G, \quad x \mapsto \xi(x,y);$$

2) **(Linearidade na segunda variável)** Para cada $x \in E$, é linear a aplicação

$$F \to G, \quad y \mapsto \xi(x,y).$$

3.2 **(Exemplos de aplicações bilineares) 1)** Se E é um espaço vectorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ então, considerando $\mathbb{K}$ como espaço vectorial de dimensão 1 sobre $\mathbb{K}$, a multiplicação pelos escalares é uma aplicação bilinear $\mathbb{K} \times E \to E$. Em particular a multiplicação do corpo é uma aplicação bilinear $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$.
2) O conjunto $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ das matrizes de tipo $m \times n$ com termos num corpo $\mathbb{K}$ tem uma estrutura natural de espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$, com dimensão $m \times n$. A multiplicação de matrizes define aplicações bilineares

$$\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K}).$$

3) Dados três espaços vectoriais E, F e G sobre o corpo $\mathbb{K}$, podemos considerar os espaços vectoriais $L(E;F)$, $L(F;G)$ e $L(E;G)$ sobre o corpo $\mathbb{K}$ (cf. 2.5, com $\mathbb{K}_r = \mathbb{K}_c = \mathbb{K}$) e a composição de aplicações lineares é uma aplicação bilinear

$$L(F;G) \times L(E;F) \to L(E;G).$$

4) Dados dois espaços vectoriais E e F sobre o corpo $\mathbb{K}$, podemos considerar uma aplicação bilinear

$$L(E;F)\times E\to F,\quad (\xi,x)\mapsto \xi(x)$$

(a *aplicação de avaliação*).

5) Dados dois corpos $\mathbb{K}_r\subset\mathbb{K}_c$, E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}_r$ e F um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}_c$, podemos considerar os espaços vectoriais $L(E;\mathbb{K}_c)$ e $L(E;F)$ sobre $\mathbb{K}_c$ e podemos considerar uma aplicação bilinear

$$L(E;\mathbb{K}_c)\times F\to L(E;F),\quad (\beta,y)\mapsto \beta\otimes y,$$

onde denotamos por $\beta\otimes y$ a aplicação linear $E\to F$ que a $x\in E$ associa $\beta(x)y$ (o *produto tensorial* de β por y).

O resultado a seguir, que será generalizado mais tarde para aplicações multilineares, permite nalguns casos provar trivialmente resultados sobre aplicações bilineares a partir de resultados conhecidos sobre aplicações lineares.

3.3 **(Um isomorfismo auxiliar)** Consideremos corpos $\mathbb{K}_r\subset\mathbb{K}_c$ e sejam E e F espaços vectoriais sobre o corpo $\mathbb{K}_r$ e G um espaço vectorial sobre o corpo $\mathbb{K}_c$. O conjunto $L(E,F;G)$ das aplicações bilineares $\xi\colon E\times F\to G$ tem então uma estrutura natural de espaço vectorial sobre $\mathbb{K}_c$ e podemos considerar um isomorfismo de espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}_c$

$$\Upsilon\colon L(E,F;G)\to L\big(E;L(F;G)\big)$$

definido por

$$\Upsilon(\xi)(x)(y)=\xi(x,y),$$

cujo inverso

$$\Upsilon^{-1}\colon L\big(E;L(F;G)\big)\to L(E,F;G)$$

está definido por

$$\Upsilon^{-1}(\lambda)(x,y)=\lambda(x)(y).$$

Dem: Não explicitamos a demonstração completa deste resultado que é totalmente previsível mas fastidiosa se levada ao pormenor. Sublinhamos apenas que, dado ξ, a linearidade, para cada $x\in E$, da aplicação $y\mapsto\xi(x,y)$ resulta da linearidade de ξ na segunda variável e que a linearidade da aplicação que transforma x nesta aplicação linear resulta da linearidade de ξ na primeira variável e da definição das operações em $L(F;G)$. $\square$

Como exemplo de aplicação do isomorfismo precedente, generalizamos para as aplicações bilineares um resultado bem conhecido no contexto das aplicações lineares.

3.4 **(Determinação de uma aplicação bilinear pelos seus valores nos elementos de duas bases)** Sejam E e F dois espaços vectoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$, o primeiro munido de uma base $w_1, \ldots, w_m$ e o segundo de um base $z_1, \ldots, z_n$. Seja G um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e consideremos, para cada $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, um vector $u_{i,j} \in G$. Existe então uma única aplicação bilinear $\xi: E \times F \to G$ tal que $\xi(w_i, z_j) = u_{i,j}$.

Dem: Comecemos por provar a existência. Para cada $1 \leq i \leq n$, o resultado conhecido no contexto das aplicações lineares permite considerar uma aplicação linear $\lambda_i \in L(F; G)$ tal que $\lambda_i(z_j) = u_{i,j}$; de novo pelo mesmo resultado, podemos agora considerar uma aplicação linear $\lambda: E \to L(F; G)$ tal que $\lambda(w_i) = \lambda_i$; considerando agora a aplicação bilinear $\xi: E \times F \to G$ imagem de λ pelo isomorfismo Υ^{-1} em 3.3, vem

$$\xi(w_i, z_j) = \lambda(w_i)(z_j) = \lambda_i(w_j) = u_{i,j}.$$

Para a unicidade, o caminho é análogo. Suponhamos que $\xi': E \times F \to G$ é tal que $\xi'(w_i, z_j) = u_{i,j}$; podemos considerar a aplicação linear

$$\lambda' = \Upsilon(\xi'): E \to L(F; G)$$

que vai verificar

$$\lambda'(w_i)(z_j) = \xi'(w_i, z_j) = u_{i,j},$$

pelo que $\lambda'(w_i) = \lambda_i$, e portanto $\lambda' = \lambda$, donde $\xi' = \xi$. □

3.5 **(Aplicações bilineares alternadas)** Sejam E e G dois espços vectoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$. Diz-se que uma aplicação bilinear $\xi: E \times E \to G$ é *alternada* se se tem $\xi(x, x) = 0$, qualquer que seja $x \in E$.

Quando isso acontecer a aplicação bilinear é também *anti-simétrica*, no sentido de se ter

$$\xi(y, x) = -\xi(x, y),$$

quaisquer que sejam $x, y \in E$. [4]

Dem: Tem-se

$$\begin{aligned} 0 &= \xi(x+y, x+y) = \xi(x, x+y) + \xi(y, x+y) = \\ &= \xi(x, x) + \xi(x, y) + \xi(y, x) + \xi(y, y) = \\ &= \xi(x, y) + \xi(y, x), \end{aligned}$$

donde $\xi(y, x) = -\xi(x, y)$. □

3.6 **(Exemplo)** Os exemplos de aplicações bilineares alternadas não são tão frequentes como os de aplicações bilineares gerais. Apresentamos neste momento apenas dois:

[4] No caso em que o corpo $\mathbb{K}$ tem característica diferente de 2, isto é, quando $2 \neq 0$ em $\mathbb{K}$, a anti-simetria implica a alternância, facto que não teremos ocasião de utilizar. Com efeito, a igualdade $\xi(x, x) = -\xi(x, x)$ implica que $2\xi(x, x) = 0$, donde $\xi(x, x) = 0$.

1) Sendo $\mathbb{K}$ um corpo, podemos definir uma aplicação bilinear alternada

$$\det\colon \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}, \quad \det\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = x_1 y_2 - y_1 x_2.$$

Temos aqui um caso muito particular do determinante que será estudado adiante.
2) Sendo $\mathbb{K}$ um corpo, podemos definir uma aplicação bilinear alternada

$$\xi\colon \mathbb{K}^3 \times \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3,$$
$$\xi\big((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\big) = \big(x_2 y_3 - y_2 x_3, y_1 x_3 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1\big).$$

No caso em que $\mathbb{K}$ é o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais, esta aplicação bilinear alternada é essencialmente o produto externo.

Vamos agora examinar a situação mais geral das aplicações multilineares em que, em vez de duas variáveis, temos um número finito p de variáveis. Limitamos o nosso estudo ao caso que nos vai interessar, em que os diferentes factores do domínio coincidem com um mesmo espaço vectorial E sobre um corpo $\mathbb{K}_r$ e o espaço vectorial de chegada é o mesmo corpo ou um corpo $\mathbb{K}_c$ tendo $\mathbb{K}_r$ como subcorpo. Nesse caso, as aplicações multilineares são também chamadas formas multilineares.

3.7 **(Formas multilineares de grau p)** Consideremos corpos $\mathbb{K}_r \subset \mathbb{K}_c$ e um espaço vectorial E sobre o corpo $\mathbb{K}_r$. Chamamos *forma multilinear* de grau p sobre E (com valores em $\mathbb{K}_c$) a uma aplicação $\xi\colon E \times E \times \cdots E \to \mathbb{K}_c$ (p variáveis no domínio) que é separadamente linear em cada variável (num sentido análogo ao de 3.1).
No caso em que $p = 1$ temos as formas lineares, referidas em 2.6, e no caso em que $p = 2$ também usamos a designação forma bilinear.
Por extensão, também admitimos o caso em que $p = 0$, caso em consideramos que uma forma multilinear de grau 0 é simplesmente um escalar em $\mathbb{K}_c$.[5] Em enunciados em que intervém um grau arbitrário não se considerará afastado o caso em que este é 0; mesmo que as demonstrações pareçam apenas fazer sentido quando o grau p é estritamente positivo, o caso do grau 0, se não for explicitamente afastado, será de justificação trivial.
Denotamos por $L^p(E; \mathbb{K}_c)$ o conjunto das formas multilineares de grau p, conjunto esse que tem uma estrutura natural de espaço vectorial sobre o corpo $\mathbb{K}_c$.

3.8 **(Um isomorfismo auxiliar)** Consideremos corpos $\mathbb{K}_r \subset \mathbb{K}_c$ e E um espaço vectorial sobre o corpo $\mathbb{K}_r$. Para cada p pode então considerar-se um isomor-

[5]Não é uma convenção totalmente arbitrária: Uma aplicação com zero variáveis pode ser identificada com a imagem por ela do único elemento do domínio, a saber, a sequência vazia. Esta interpretação, talvez no limiar do inaceitável por aqueles que preferem conceitos mais concretos, deve ser relembrada em futuras definições em que se pretenda permitir que alguma das formas multilineares tenha grau 0.

fismo

$$\Upsilon\colon L^{p+1}(E;\mathbb{K}_c) \to L\big(E;L^p(E;\mathbb{K}_c)\big)$$

definido por

$$\Upsilon(\xi)(x_1)(x_2,\ldots,x_{p+1}) = \xi(x_1,x_2,\ldots,x_{p+1}),\ ^6$$

cujo inverso

$$\Upsilon^{-1}\colon L\big(E;L^p(E;\mathbb{K}_c)\big) \to L^{p+1}(E;\mathbb{K}_c)$$

está definido por

$$\Upsilon^{-1}(\lambda)(x_1,x_2,\ldots,x_{p+1}) = \lambda(x_1)(x_2,\ldots,x_{p+1}).$$

Dem: A justificação é uma adaptação trivial da apresentada, no caso em que $p=1$, em 3.3. □

3.9 **(Determinação de uma forma multilinear pelos seus valores nas sequências de elementos de uma base)** Consideremos corpos $\mathbb{K}_r \subset \mathbb{K}_c$ e um espaço vectorial E sobre o corpo $\mathbb{K}_r$, munido de uma base $w_1,\ldots,w_n$. Consideremos, para cada sequência $i_1,\ldots,i_p$ de índices em $\{1,\ldots,n\}$ um escalar $a_{i_1,\ldots,i_p} \in \mathbb{K}_c$. Existe então um único $\xi \in L^p(E;\mathbb{K}_c)$ tal que, para cada sequência $i_1,\ldots,i_p$,

$$\xi(w_{i_1},\ldots,w_{i_p}) = a_{i_1,\ldots,i_p}.$$

Dem: A demonstração, por indução em p, é uma adaptação simples da justificação da propriedade 3.4, utilizando-se 3.8 em vez de 3.3. □

3.10 **(Formas multilineares num espaço vectorial quociente)** Consideremos corpos $\mathbb{K}_r \subset \mathbb{K}_c$, E um espaço vectorial sobre o corpo $\mathbb{K}_r$ e $F \subset E$ um subespaço vectorial. Seja $\xi \in L^p(E;\mathbb{K}_c)$ tal que se tenha $\xi(x_1,\ldots,x_p) = 0$ sempre que $x_i \in F$ para algum índice $1 \le i \le p$. Fica então bem definido um elemento $\widehat{\xi} \in L^p(\frac{E}{F};\mathbb{K}_c)$, que se diz ser o obtido a partir de ξ por *passagem ao quociente* pela condição de se ter

$$\widehat{\xi}([x_1]_F,\ldots,[x_p]_F) = \xi(x_1,\ldots,x_p)$$

(comparar com o referido na alínea c) de 2.8).
Dem: Fazemos a demonstração por indução em p, reparando desde logo que o caso $p=0$ é trivial. O caso em que $p=1$, já foi referido na alínea c) de 2.8. Supondo que o resultado é verdadeiro para um certo grau p, consideremos $\xi \in L^{p+1}(E;\mathbb{K}_c)$, verificando a condição referida no enunciado. Lembrando o isomorfismo Υ em 3.8, vemos que, para cada $x_1 \in E$, a aplicação $\Upsilon(x_1) \in L^p(E;\mathbb{K}_c)$ verifica a condição do enunciado pelo que, pela

[6] Comparar com 3.3.

hipótese de indução, fica bem definido um elemento $\Upsilon(x_1)\hat{} \in L^p(\frac{E}{F};\mathbb{K}_c)$ por

$$\Upsilon(\xi)(x_1)\hat{}([x_2]_F,\ldots,[x_{p+1}]_F) = \xi(x_1,\ldots,x_{p+1}).$$

Uma vez que se tem $\Upsilon(\xi)(x_1)\hat{} = 0$ sempre que $x_1 \in F$, fica bem definida uma aplicação linear $\lambda\colon \frac{E}{F} \to L^p(\frac{E}{F};\mathbb{K}_c)$ por

$$\lambda([x_1]_F) = \Upsilon(\xi)(x_1)\hat{}$$

e então pondo $\widehat{\xi} = \Upsilon^{-1}(\lambda) \in L^{p+1}(\frac{E}{F};\mathbb{K}_c)$, tem-se

$$\begin{aligned}&\widehat{\xi}([x_1]_F,\ldots,[x_{p+1}]_F) = \lambda([x_1]_F)([x_2]_F,\ldots,[x_{p+1}]_F) =\\ &= \Upsilon(\xi)(x_1)\hat{}([x_2]_F,\ldots,[x_{p+1}]_F) = \xi(x_1,\ldots,x_{p+1}).\end{aligned}$$ □

3.11 **(Complemento de 3.10)** No contexto de 3.10, tem lugar um subespaço vectorial $L^p_F(E;\mathbb{K}_c)$ de $L^p(E;\mathbb{K}_c)$, constituído pelos ξ tais que se tem $\xi(x_1,\ldots,x_p) = 0$ sempre que $x_i \in F$ para algum índice $1 \le i \le p$, e tem lugar um isomorfismo

$$L^p_F(E;\mathbb{K}_c) \to L^p(\frac{E}{F};\mathbb{K}_c), \quad \xi \mapsto \widehat{\xi}.$$

Dem: É evidente que esta aplicação é linear, a injectividade é simplesmente a constatação de que $\widehat{\xi}$ determina ξ e a sobrejectividade resulta de que, para cada $\widehat{\xi} \in L^p(\frac{E}{F};\mathbb{K}_c)$, o elemento $\xi \in L^p(E;\mathbb{K}_c)$ definido por

$$\xi(x_1,\ldots,x_p) = \widehat{\xi}([x_1]_F,\ldots,[x_p]_F)$$

vai pertencer a $L^p_F(E;\mathbb{K}_c)$ e ter ξ por imagem. □

3.12 **(Imagem recíproca de uma forma multilinear)** Generalizando o referido em 2.7, consideremos corpos $\mathbb{K}_r \subset \mathbb{K}_c$, dois espaços vectoriais E e E' sobre $\mathbb{K}_r$ e uma aplicação linear $\lambda\colon E \to E'$. Para cada p, podemos então considerar uma *aplicação linear imagem recíproca*

$$\lambda^*_p\colon L^p(E';\mathbb{K}_c) \to L^p(E;\mathbb{K}_c)$$

definida por

$$\lambda^*_p(\xi)(x_1,\ldots,x_p) = \xi\big(\lambda(x_1),\ldots,\lambda(x_p)\big).$$

Para $p = 1$, reencontramos a aplicação linear λ^* referida em 2.7 e para $p = 0$, λ^*_0 é simplesmente a aplicação linear identidade de $L^0(E;\mathbb{K}_c) = \mathbb{K}_c$. Tal como em 2.7, as aplicações lineares imagem recíproca verificam trivialmente propriedades naturais de contravariância, do tipo

$$(\mu \circ \lambda)^*_p = \lambda^*_p \circ \mu^*_p,$$

propriedades que implicam que, no caso em que λ é um isomorfismo, λ_p^* também é um isomorfismo e com inverso $(\lambda^{-1})_p^*$.

Na continuação, vamos fixar a nossa atenção num tipo particular de formas multilineares, as alternadas, que, no caso do grau 2, já foram examinadas atrás em 3.5.

3.13 **(Formas multilineares alternadas de grau p)** Consideremos corpos $\mathbb{K}_r \subset \mathbb{K}_c$ e seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}_r$. Diz-se que uma forma multilinear de grau p, $\xi \in L^p(E;\mathbb{K}_c)$ é *alternada* se, para cada par de índices $i < j$ em $\{1,\ldots,p\}$, ela for uma aplicação bilinear alternada como função das variáveis i e j, isto é, forem alternadas as aplicações bilineares $E \times E \to \mathbb{K}_c$ que se obtêm a partir de ξ fixando arbitrariamente os valores dos argumentos correspondentes a índices diferentes de i e de j (cf. 3.5), ou seja, se se tem

$$\xi(x_1,\ldots,x_p) = 0$$

sempre que exista $i < j$ com $x_i = x_j$ (sempre que dois argumentos distintos têm o mesmo valor).
O conjunto das formas multilineares alternadas de grau p é um subespaço vectorial de $L^p(E;\mathbb{K}_c)$, que será denotado por $A^p(E;\mathbb{K}_c)$.
Para $p = 2$, temos o caso particular das aplicações bilineares alternadas em 3.5 em que o espaço de chegada é $\mathbb{K}_c$. Para $p = 0$ e para $p = 1$ não há pares de índices $i < j$ e portanto

$$A^0(E;\mathbb{K}_c) = L^0(E;\mathbb{K}_c) = \mathbb{K}_c, \quad A^1(E;\mathbb{K}_c) = L^1(E;\mathbb{K}_c) = L(E;\mathbb{K}_c).$$

3.14 **(Outras propriedades das formas alternadas)** Consideremos corpos $\mathbb{K}_r \subset \mathbb{K}_c$ e sejam E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}_r$ e $\xi \in A^p(E;\mathbb{K}_c)$. Então:
a) Quaisquer que sejam $x_1,\ldots,x_p \in E$ e $i < j$ em $\{1,\ldots,,p\}$,

$$\begin{aligned}&\xi(x_1,\ldots,x_{i-1},x_j,x_{i+1},\ldots,x_{j-1},x_i,x_{j+1},\ldots,x_p) = \\ &= -\xi(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_{j-1},x_j,x_{j+1},\ldots,x_p),\end{aligned}$$

ou seja, quando se trocam duas variáveis o valor de ξ vem multiplicado por -1.
b) Quaisquer que sejam $x_1,\ldots,x_p \in E$ e $1 \le i \le p$,

(1)
$$\begin{aligned}&\xi(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_p) = \\ &= (-1)^{i-1}\,\xi(x_i,x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_p),\end{aligned}$$

em particular,

(2)
$$\xi(x_1,\ldots,,x_{p-1},x_p) = (-1)^{p-1}\xi(x_p,x_1,\ldots,x_{p-1}),$$

e vem também

(3)
$$\begin{aligned}&\xi(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_p)=\\&=(-1)^{p-i}\,\xi(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_p,x_i).\end{aligned}$$

c) Se $x_1,\ldots,x_p$ é uma família linearmente dependente de vectores de E então

$$\xi(x_1,\ldots,x_p)=0.$$

Em particular, se E tiver dimensão finita inferior p tem-se $A^p(E;\mathbb{K}_c)=\{0\}$, já que todos os sistemas $x_1,\ldots,x_p$ são linearmente dependentes. Por este motivo, quando E tem dimensão finita n, aos elementos de $A^n(E;\mathbb{K}_c)$ também se dá o nome de formas multilineares alternadas de *grau máximo*.[7]
d) Se $F\subset E$ é um subespaço vectorial e denotarmos por

$$A^p_F(E;\mathbb{K}_c)=A^p(E;\mathbb{K}_c)\cap L^p_F(E;\mathbb{K}_c)$$

o subespaço vectorial das formas multilineares alternadas de grau p que tomam o valor 0 sempre que alguma das variáveis pertença a F, o isomorfismo $L^p_F(E;\mathbb{K}_c)\to L^p(\frac{E}{F};\mathbb{K}_c)$ referido em 3.11 e 3.10 aplica $A^p_F(E;\mathbb{K}_c)$ sobre $A^p(\frac{E}{F};\mathbb{K}_c)$ e determina portanto, por restrição, um isomorfismo

$$A^p_F(E;\mathbb{K}_c)\to A^p(\frac{E}{F};\mathbb{K}_c).$$

e) Sejam E' outro espaço vectorial sobre $\mathbb{K}_r$ e $\lambda\colon E\to E'$ uma aplicação linear. Então a aplicação linear $\lambda^*_p\colon L^p(E';\mathbb{K}_c)\to L^p(E;\mathbb{K}_c)$ referida em 3.12 aplica $A^p(E';\mathbb{K}_c)$ em $A^p(E;\mathbb{K}_c)$ e determina assim, por restrição, uma aplicação linear, denotada do mesmo modo,

$$\lambda^*_p\colon A^p(E';\mathbb{K}_c)\to A^p(E;\mathbb{K}_c).$$

Estas restrições verificam as propriedades de contravariância análogas às referidas em 3.12, que implicam, em particular, que, no caso em que λ é um isomorfismo, as restrições são isomorfismos, tendo

$$(\lambda^{-1})^*_p\colon A^p(E;\mathbb{K}_c)\to A^p(E';\mathbb{K}_c)$$

como inversos.
Dem: a) Temos uma consequência directa da propriedade de anti-simetria das aplicações bilineares alternadas referida em 3.5.
b) Demonstramos (1) por indução em i, o resultado sendo tautológico no caso em que $i=1$. Supondo o resultado verdadeiro para um certo i, utilizamos a hipótese de indução e a conclusão de a) para deduzir que

[7] Veremos na secção 4 que $A^n(E;\mathbb{K}_c)\neq\{0\}$, mais precisamente, que este espaço tem dimensão 1.

$$\begin{aligned}
&\xi(x_1,\ldots,x_i,x_{i+1},x_{i+2},\ldots,x_p) = \\
&= -\xi(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},x_i,x_{i+2},\ldots,x_p) = \\
&= -(-1)^i\xi(x_{i+1},x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+2},\ldots,x_p) = \\
&= (-1)^{i+1}\xi(x_{i+1},x_1,\ldots,x_i,x_{i+2},\ldots,x_p).
\end{aligned}$$

A fórmula (2) é o caso particular de (1) em que $i=p$. A fórmula (3) resulta de aplicar sucessivamente (1) e (2), esta última com os dois membros trocados:

$$\begin{aligned}
&\xi(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_p) = \\
&= (-1)^{i-1}\,\xi(x_i,x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_p) = \\
&= (-1)^{1-i}(-1)^{p-1}\xi(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n,x_i).
\end{aligned}$$

c) O facto de termos uma família linearmente dependente implica a existência de i tal que

$$x_i = \sum_{j\neq i} a_j\,x_j$$

para uma certa família de escalares a_j, com $j\neq i$. Tendo em conta a linearidade de ξ na variável i, vem

$$\xi(x_1,\ldots,x_p) = \sum_{j\neq i} a_j\,\xi(x_1,\ldots,x_{i-1},x_j,x_{i+1},\ldots,x_n) = 0,$$

uma vez que em cada parcela o vector x_j aparece em dois argumentos diferentes.
c) e d) Estas conclusões decorrem trivialmente das definições. □

A propriedade a seguir, que teremos ocasião de utilizar mais adiante, mostra que uma propriedade *a priori* mais fraca que a utilizada para definir as formas multilineares alternadas é suficiente para garantir que uma dada forma multilinear é alternada.

3.15 **(Condição suficiente para uma forma multilinear ser alternada)** Consideremos corpos $\mathbb{K}_r\subset\mathbb{K}_c$, um espaço vectorial E sobre $\mathbb{K}_r$ e $\xi\in L^p(E;\mathbb{K}_c)$ tal que se tenha $\xi(x_1,\ldots,x_p)=0$ sempre que exista $1\le i\le p-1$ com $x_i=x_{i+1}$ (ou seja, sempre que dois argumentos consecutivos têm o mesmo valor). Tem-se então que ξ é alternada.
Dem: O que temos que provar é que, sempre que exista $i<j$ com $x_i=x_j$ tem-se ainda $\xi(x_1,\ldots,x_p)=0$. Fazemos a prova desta afirmação por indução em $k=j-i$, começando por notar que esta afirmação é verdadeira, por hipótese, no caso em que $k=1$. Suponhamos que o resultado é verdadeiro quando $j-i=k$ e provemo-lo quando $j-i=k+1$. Ora, tendo em conta a propriedade de anti-simetria das aplicações bilineares alternadas

referida em 3.5 e a hipótese de indução, vemos que se tem então

$$\xi(x_1,\ldots,x_p) = -\xi(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},x_i,x_{i+2},\ldots,x_j,\ldots,x_p) = 0$$

(reparar que no segundo membro x_i está na posição $i+1$). □

3.16 **(Exercícios) 1)** Reparar que, para cada $\xi \in L^p(E;\mathbb{K}_c)$ e $\eta \in L^q(E;\mathbb{K}_c)$, fica bem definida uma forma multilinear alternada $\xi \otimes \eta$ de grau $p+q$ por

$$(\xi \otimes \eta)(x_1,\ldots,x_{p+q}) = \xi(x_1,\ldots,x_p) \times \eta(x_{p+1},\ldots,x_{p+q})$$

(o *produto tensorial* de ξ por η). Verificar que o produto tensorial define uma aplicação bilinear

$$L^p(E;\mathbb{K}_c) \times L^q(E;\mathbb{K}_c) \to L^{p+q}(E;\mathbb{K}_c).$$

Enunciar e verificar uma propriedade de associatividade para o produto tensorial. O que será o produto tensorial no caso em que $p=0$ ou $q=0$? Enunciar e verificar o comportamento do produto tensorial relativamente às imagens recíprocas, na presença de uma aplicação linear $\lambda\colon E \to E'$.
2) Utilizar os isomorfismos em 3.8 para verificar que se E tem dimensão n sobre $\mathbb{K}_r$ então $L^p(E;\mathbb{K}_c)$ tem dimensão n^p sobre $\mathbb{K}_c$.
3) Verificar, mais precisamente, que a uma base $w_1,\ldots,w_n$ de E pode associar-se uma base de $L^p(E;\mathbb{K}_c)$, constituída por formas multilineares $\xi_{i_1,\ldots,i_p}$, com $i_1,\ldots,i_p$ em $\{1,\ldots,n\}$, para a qual cada $\xi \in L^p(E;\mathbb{K}_c)$ admite a decomposição

$$\xi = \sum_{i_1,\ldots,i_p} \xi(w_{i_1},\ldots,w_{i_p})\, \xi_{i_1,\ldots,i_p}.$$

O que serão os produtos tensoriais $\xi_{i_1,\ldots,i_p} \otimes \xi_{i_{p+1},\ldots,i_{p+q}}$?

§4. O determinante

Há vários conceitos de determinante, todos relacionados entre si. O primeiro que vamos examinar é o de determinante de um sistema de n vectores de um espaço vectorial de dimensão n no qual se considera fixada uma base. A definição desse conceito baseia-se no facto de, para um espaço vectorial de dimensão n, o espaço das formas multilineares alternadas de grau n ter dimensão 1. Provaremos esse facto com o auxílio do lema que apresentamos em seguida.

4.1 **(Lema do desenrascanço)** Consideremos corpos $\mathbb{K}_r \subset \mathbb{K}_c$. Sejam E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}_r$ de dimensão $n \geq 2$, $w \neq 0$ fixado em E e $F \subset E$ o subespaço de dimensão 1 gerado por w e consideremos o espaço vectorial

quociente $\frac{E}{F}$, que sabemos ter dimensão $n-1$.
a) Existe um isomorfismo de espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}_c$

$$\Psi_w\colon A^n(E;\mathbb{K}_c) \to A^{n-1}(\frac{E}{F};\mathbb{K}_c)$$

definido por

$$\Psi_w(\xi)([x_1]_F,\ldots,[x_{n-1}]_F) = \xi(x_1,\ldots,x_{n-1},w).$$

b) (Laplace escondido com a cauda de fora) O isomorfismo inverso

$$\Psi_w^{-1}\colon A^{n-1}(\frac{E}{F};\mathbb{K}_c) \to A^n(E;\mathbb{K}_c)$$

admite a seguinte caracterização: Fixando uma aplicação linear $\alpha\colon E \to \mathbb{K}_r$ tal que $\alpha(w) = 1$, tem-se

$$\Psi_w^{-1}(\eta)(x_1,\ldots,x_n) = \\ = \sum_{1\le i\le n} (-1)^{n+i}\,\alpha(x_i)\,\eta\big([x_1]_F,\ldots,[x_{i-1}]_F,[x_{i+1}]_F,\ldots,[x_n]_F\big),$$ [8]

ou com uma convenção frequente que permite encurtar as expressões,

$$\Psi_w^{-1}(\eta)(x_1,\ldots,x_n) = \\ = \sum_{1\le i\le n} (-1)^{n+i}\,\alpha(x_i)\,\eta\big([x_1]_F,\ldots,\widehat{[x_i]_F},\ldots,[x_n]_F\big).$$ [9]

Dem: 1) O facto de, para cada $\xi \in A^n(E;\mathbb{K}_c)$, $\Psi_w(\xi)$ ser uma forma multilinear alternada de grau $n-1$ sobre $\frac{E}{F}$ bem definida resulta do que foi referido na alínea d) de 3.14, uma vez que tem lugar uma forma multilinear alternada de grau $n-1$,

$$(x_1,\ldots,x_{n-1}) \mapsto \xi(x_1,\ldots,x_{n-1},w)$$

que se anula quando $x_j \in F$ para algum $j \le n-1$, já que o sistema $x_1,\ldots,x_{n-1},w$ é então linearmente dependente, por ter dois vectores no subespaço vectorial F de dimensão 1. É trivial constatar que a aplicação

$$\Psi_w\colon A^n(E;\mathbb{K}_c) \to A^{n-1}(\frac{E}{F};\mathbb{K}_c)$$

assim definida é linear.

[8]No segundo membro é indiferente escrever $(-1)^{n+i}$ ou $(-1)^{n-i}$, uma vez que $(-1)^{2i} = 1$. Este tipo de transformação será feito implicitamente, com frequência quando se consideram potências de -1.
[9]A convenção, que utilizaremos mais vezes adiante, consiste em identificar uma sequência sugerindo uma sequência natural e colocar um “grande chapéu” nos elementos que se devem considerar como suprimidos nesta.

2) Vamos agora mostrar que a aplicação linear

$$\Psi_w \colon A^n(E;\mathbb{K}_c) \to A^{n-1}(\frac{E}{F};\mathbb{K}_c)$$

é injectiva. Consideremos então $\xi \in A^n(E;\mathbb{K}_c)$ tal que $\Psi_w(\xi) = 0$ e mostremos que se tem necessariamente $\xi = 0$. Fixemos uma base $w_1, \dots, w_n$ de E com $w_n = w$. Para mostrar que $\xi = 0$ bastará, como se viu em 3.9, provar que se tem

$$\xi(w_{i_1}, \dots, w_{i_n}) = 0$$

quaisquer que sejam os índices $i_1, \dots, i_n$ em $\{1, \dots, n\}$. Ora isso é certamente verdade se estes índices não forem distintos e, no caso em que eles são distintos, ou $n = i_n$ e portanto

$$\xi(w_{i_1}, \dots, w_{i_n}) = \Psi_w(\xi)([w_{i_1}]_F, \dots, [w_{i_{n-1}}]_F) = 0$$

ou $n = i_\ell$ para um certo $\ell < n$ e portanto, mais uma vez,

$$\begin{aligned}\xi(w_{i_1}, \dots, w_{i_n}) &= -\xi(w_{i_1}, \dots, w_{i_{\ell-1}}, w_{i_n}, w_{i_{\ell+1}}, \dots, w_{i_\ell}) = \\ &= -\Psi_w(\xi)([w_{i_1}]_F, \dots, [w_{i_{\ell-1}}]_F, [w_{i_n}]_F, [w_{i_{\ell+1}}]_F, \dots) = 0.\end{aligned}$$

3) Fixemos agora uma aplicação linear $\alpha \colon E \to \mathbb{K}_r$ tal que $\alpha(w) = 1$. Para cada

$$\eta \in A^{n-1}(\frac{E}{F};\mathbb{K}_c),$$

consideremos a aplicação multilinear $\Phi(\eta) \colon E^n \to \mathbb{K}_c$ definida por

$$\begin{aligned}&\Phi(\eta)(x_1, \dots, x_n) = \\ &= \sum_{1 \le i \le n} (-1)^{n+i}\, \alpha(x_i)\, \eta\big([x_1]_F, \dots, \widehat{[x_i]}_F, \dots, [x_n]_F\big).\end{aligned}$$

Vamos utilizar 3.15 para verificar que esta aplicação multilinear é alternada para o que supomos que se tem $x_j = x_{j+1}$ para um certo $j < n$. Na soma de n parcelas que caracteriza $\Phi(\eta)(x_1, \dots, x_n)$ só duas não são necessariamente nulas, as correspondentes a $i = j$ e a $i = j + 1$, visto que em cada uma das restantes o elemento $[x_j]_F = [x_{j+1}]_F$ aparece em duas posições nos argumentos de η. Vemos assim que

$$\begin{aligned}&\Phi(\eta)(x_1, \dots, x_n) = \\ &= (-1)^{n+j}\, \alpha(x_j)\, \eta\big([x_1]_F, \dots, [x_{j-1}]_F, [x_{j+1}]_F, [x_{j+2}]_F \dots, [x_n]_F\big) + \\ &\quad + (-1)^{n+j+1}\, \alpha(x_{j+1})\, \eta\big([x_1]_F, \dots, [x_{j-1}]_F, [x_j]_F, [x_{j+2}]_F, \dots, [x_n]_F\big) = \\ &= 0,\end{aligned}$$

uma vez que $\alpha(x_j) = \alpha(x_{j+1})$ e $[x_j]_F = [x_{j+1}]_F$.

4) O que vimos em 3) mostra que temos uma aplicação

$$\Phi: A^{n-1}(\frac{E}{F};\mathbb{K}_c) \to A^n(E;\mathbb{K}_c).$$

Vamos agora mostrar que $\Psi_w \circ \Phi$ é a identidade de $A^{n-1}(\frac{E}{F};\mathbb{K}_c)$ o que, tendo em conta o facto de, como se viu em 2), a aplicação linear Ψ_w ser injectiva, implica que Ψ_w é um isomorfismo e que $\Phi = \Psi_w^{-1}$. Dado $\eta \in A^{n-1}(\frac{E}{F};\mathbb{K}_c)$, vem, reparando que $[w]_F = 0$ e que $\alpha(w) = 1$,

$$\begin{aligned}
&(\Psi_w \circ \Phi)(\eta)\big([x_1]_F, \ldots, [x_{n-1}]_F\big) = \\
&= \Phi(\eta)(x_1, \ldots, x_{n-1}, w) = \\
&= \Big(\sum_{1\le i\le n-1} (-1)^{n+i}\,\alpha(x_i)\,\eta\big([x_1]_F, \ldots, \widehat{[x_i]}_F, \ldots, [x_{n-1}]_F, [w]_F\big)\Big) + \\
&\quad + (-1)^{n+n}\,\alpha(w)\,\eta\big([x_1]_F, \ldots, [x_{n-1}]_F\big) = \\
&= \eta\big([x_1]_F, \ldots, [x_{n-1}]_F\big),
\end{aligned}$$

ou seja, $\Psi_w \circ \Phi(\eta) = \eta$. □

4.2 **(Definição do determinante)** Consideremos dois corpos $\mathbb{K}_r \subset \mathbb{K}_c$. Sejam E um espaço vectorial de dimensão n sobre o corpo $\mathbb{K}_r$ e $\mathcal{B}$ uma *base ordenada*[10] de E, constituída pelos vectores $w_1, \ldots, w_n$.

a) Existe um isomorfismo de espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}_c$

$$\Theta_{\mathcal{B}}: A^n(E;\mathbb{K}_c) \to \mathbb{K}_c$$

definido por

(1) $$\Theta_{\mathcal{B}}(\xi) = \xi(w_1, \ldots, w_n),$$

isomorfismo esse que aplica $A^n(E;\mathbb{K}_r)$ sobre $\mathbb{K}_r$.

Repare-se que, no caso em que $n = 0$, $A^0(E;\mathbb{K}_c)$ identifica-se com $\mathbb{K}_c$ e $\Theta_{\mathcal{B}}$ é a identidade de $\mathbb{K}_c$.

b) Em consequência, o espaço vectorial $A^n(E;\mathbb{K}_c)$ sobre $\mathbb{K}_c$ tem dimensão 1 e admite uma base constituída por um único elemento

$$\det_{\mathcal{B}} \in A^n(E;\mathbb{K}_r) \subset A^n(E;\mathbb{K}_c),$$

definido pela condição de se ter $\Theta_{\mathcal{B}}(\det_{\mathcal{B}}) = 1$, isto é,

$$\det_{\mathcal{B}}(w_1, \ldots, w_n) = 1,$$

e tem-se, para cada $\xi \in A^n(E;\mathbb{K}_c)$,

(2) $$\xi = \xi(w_1, \ldots, w_n)\,\det_{\mathcal{B}}.$$ [11]

[10]Falamos de base ordenada para sublinhar que, ao contrário do que sucede noutras situações, é importante a ordem considerada nos vectores da base, implicada, neste caso, pelo uso dos índices $1, \ldots, n$.

[11]Comparar com a fórmula (2) em 2.6 e com o exercício 3) em 3.16.

Diz-se que $\det_{\mathcal{B}}$ é a forma multilinear alternada *determinante*, associada à base $\mathcal{B}$.
Repare-se que, no caso em que $n = 0$, $\det_{\mathcal{B}}$ é o elemento 1 de $A^0(E;\mathbb{K}_r) = \mathbb{K}_r$ e que, no caso em que E tem dimensão $n = 1$, com uma base $\mathcal{B}$ constituída pelo vector w_1, $\det_{\mathcal{B}} \in A^1(E;\mathbb{K}_r) = L(E;\mathbb{K}_r)$ é o elemento da base dual α_1 (cf. 2.6).
c) (Critério de independência linear) Se $\xi \neq 0$ em $A^n(E;\mathbb{K}_c)$, um sistema de vectores $x_1, \ldots, x_n$ de E é linearmente independente se, e só se,

$$\xi(x_1, \ldots, x_n) \neq 0.$$

Dem: a) É evidente que $\Theta_{\mathcal{B}}$ é uma aplicação linear de $A^n(E;\mathbb{K}_c)$ para $\mathbb{K}_c$. No caso em que $n = 0$, já referimos que $\Theta_{\mathcal{B}}$ é a identidade de $\mathbb{K}_c$, portanto um isomorfismo. Em geral, vamos mostrar que $\Theta_{\mathcal{B}}$ é um isomorfismo por indução na dimensão n de E. No caso em que E tem dimensão 1, $A^1(E;\mathbb{K}_c) = L(E;\mathbb{K}_c)$ e $\Theta_{\mathcal{B}}\colon L(E;\mathbb{K}_c) \to \mathbb{K}_c$ está definida por $\Theta_{\mathcal{B}}(\xi) = \xi(w_1)$ pelo que o facto de $\Theta_{\mathcal{B}}$ ser bijectiva, e portanto um isomorfismo, resulta do facto bem conhecido de uma aplicação linear ficar determinada pelas imagens arbitrárias que devem ter os elementos de uma base. Suponhamos o resultado verdadeiro quando E tem dimensão $n-1$ e provemo-lo quando E tem dimensão n e é dada uma base ordenada $\mathcal{B}$ de E constituída pelos vectores $w_1, \ldots, w_n$. Consideremos o subespaço vectorial $F \subset E$, de dimensão 1, gerado pelo vector $w = w_n$ e consideremos no espaço vectorial quociente $\frac{E}{F}$ de dimensão $n-1$ a base $\mathcal{B}'$ constituída pelos vectores $[w_1]_F, \ldots, [w_{n-1}]_F$. A hipótese de indução implica que temos um isomorfismo $\Theta_{\mathcal{B}'}\colon A^{n-1}(\frac{E}{F};\mathbb{K}_c) \to \mathbb{K}_c$, que a η associa $\eta\big([y_1]_F, \ldots, [y_{n-1}]_F\big)$. Reparamos agora que, considerando o isomorfismo

$$\Psi_w\colon A^n(E;\mathbb{K}_c) \to A^{n-1}(\frac{E}{F};\mathbb{K}_c)$$

definido na alínea a) de 4.1, tem-se

$$\begin{aligned}\Theta_{\mathcal{B}'}(\Psi_w(\xi)) &= \Psi_w(\xi)\big([w_1]_F, \ldots, [w_{n-1}]_F\big) = \\ &= \xi(w_1, \ldots, w_{n-1}, w_n) = \Theta_{\mathcal{B}}(\xi),\end{aligned}$$

e portanto $\Theta_{\mathcal{B}} = \Theta_{\mathcal{B}'} \circ \Psi_w$ também é um isomorfismo. O facto de $\Theta_{\mathcal{B}}$ aplicar $A^n(E;\mathbb{K}_r)$ sobre $\mathbb{K}_r$ resulta de que não estamos impedidos de considerar para $\mathbb{K}_c$ o próprio $\mathbb{K}_r$.
b) O facto de $\Theta_{\mathcal{B}}$ ser um isomorfismo implica que $A^n(E;\mathbb{K}_c)$, tal como $\mathbb{K}_c$, tem dimensão 1 e que $\det_{\mathcal{B}}$, sendo a imagem da base 1 de $\mathbb{K}_c$ pelo isomorfismo inverso $\Theta_{\mathcal{B}}^{-1}$, constitui uma base de $A^n(E;\mathbb{K}_c)$, que pertence a $A^n(E;\mathbb{K}_r)$. Quanto à identidade (2), atendemos a que, dado ξ, o facto de $\det_{\mathcal{B}}$ ser uma base implica que $\xi = a \det_{\mathcal{B}}$ para algum $a \in \mathbb{K}_c$ e vem então

$$\xi(w_1, \ldots, w_n) = a \det_{\mathcal{B}}(w_1, \ldots, w_n) = a.$$

c) Já vimos na alínea c) de 3.14 que, no caso em que $x_1, \ldots, x_n$ são linearmente dependentes, tem-se $\xi(x_1,\ldots,x_n)=0$ para qualquer $\xi\in A_n(E;\mathbb{K}_c)$. No caso em que $\xi\neq 0$ e $x_1,\ldots,x_n$ são linearmente independentes, portanto uma base $\widehat{\mathcal{B}}$ de E, a igualdade

$$\xi=\xi(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{det}_{\widehat{\mathcal{B}}},$$

implica que $\xi(x_1,\ldots,x_n)\neq 0$. □

4.3 **(O teorema de Laplace "relativo à linha *k*" em versão não matricial)** Seja E um espaço vectorial de dimensão $n\ge 2$ sobre um corpo $\mathbb{K}$, no qual se fixou uma base ordenada $\mathcal{B}$ constituída pelos vectores $w_1,\ldots,w_n$, e consideremos a forma multilinear alternada $\mathrm{det}_{\mathcal{B}}\in A^n(E;\mathbb{K})$ correspondente assim como a base dual de $L(E;\mathbb{K})$, constituída pelas formas lineares $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ (cf. 2.6).
Fixemos $1\le k\le n$ e consideremos o subespaço vectorial F_k gerado por w_k e a base ordenada $\mathcal{B}_k$ do espaço vectorial quociente $\frac{E}{F_k}$ constituída pelos vectores

$$[w_1]_{F_k},\ldots,[w_{k-1}]_{F_k},[w_{k+1}]_{F_k},\ldots,[w_n]_{F_k}.$$

Tem-se então, para $x_1,\ldots,x_n\in E$,

$$\begin{aligned}&\mathrm{det}_{\mathcal{B}}(x_1,\ldots,x_n)=\\&=\sum_{1\le i\le n}(-1)^{k+i}\,\alpha_k(x_i)\,\mathrm{det}_{\mathcal{B}_k}\big([x_1]_{F_k},\ldots,[x_{i-1}]_{F_k},[x_{i+1}]_{F_k},\ldots,[x_n]_{F_k}\big).\end{aligned}$$

Dem: Vamos aplicar o lema 4.1 com $w=w_k$ e $\alpha=\alpha_k$. Lembrando a fórmula (3) na alínea b) de 3.14, vem

$$\begin{aligned}\Psi_{w_k}(\mathrm{det}_{\mathcal{B}})&=\Psi_{w_k}(\mathrm{det}_{\mathcal{B}})\big([w_1]_{F_k},\ldots,[w_{k-1}]_{F_k},[w_{k+1}]_{F_k},\ldots,[w_n]_{F_k}\big)\,\mathrm{det}_{\mathcal{B}_k}=\\&=\mathrm{det}_{\mathcal{B}}(w_1,\ldots,w_{k-1},w_{k+1},\ldots,w_n,w_k)\,\mathrm{det}_{\mathcal{B}_k}=\\&=(-1)^{n-k}\,\mathrm{det}_{\mathcal{B}}(w_1,\ldots,w_{k-1},w_k,w_{k+1},\ldots,w_n)\,\mathrm{det}_{\mathcal{B}_k}=\\&=(-1)^{n+k}\,\mathrm{det}_{\mathcal{B}_k}\end{aligned}$$

e portanto, tendo em conta a caracterização de $\Psi_{w_k}^{-1}$ na alínea b) do lema referido,

$$\begin{aligned}&\mathrm{det}_{\mathcal{B}}(x_1,\ldots,x_n)=(-1)^{n+k}\,\Psi_{w_k}^{-1}(\mathrm{det}_{\mathcal{B}_k})(x_1,\ldots,x_n)=\\&=(-1)^{n+k}\sum_{1\le i\le n}(-1)^{n+i}\,\alpha_k(x_i)\,\mathrm{det}_{\mathcal{B}_k}\big([x_1]_{F_k},\ldots,\widehat{[x_i]}_{F_k},\ldots,[x_n]_{F_k}\big)=\\&=\sum_{1\le i\le n}(-1)^{k+i}\,\alpha_k(x_i)\,\mathrm{det}_{\mathcal{B}_k}\big([x_1]_{F_k},\ldots,[x_{i-1}]_{F_k},[x_{i+1}]_{F_k},\ldots,[x_n]_{F_k}\big).\end{aligned}$$

□

4.4 **(Invariância do determinante por isomorfismo I)** Sejam E e $\widehat{E}$ dois espaços vectoriais de dimensão n sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $\mu\colon E\to\widehat{E}$ um isomorfismo. Fixemos uma base ordenada $\mathcal{B}$ de E constituída pelos vectores

$w_1, \dots, w_n$ e denotemos por $\widehat{\mathcal{B}}$ a base orientada de $\widehat{E}$ constituída pelos vectores $\mu(w_1), \dots, \mu(w_n)$. Considerando as formas multilineares alternadas determinante,

$$\det_{\mathcal{B}} \in A^n(E;\mathbb{K}), \quad \det_{\widehat{\mathcal{B}}} \in A^n(\widehat{E};\mathbb{K}),$$

e o isomorfismo $\mu^*: A^n(\widehat{E};\mathbb{K}) \to A^n(E;\mathbb{K})$ (cf. a alínea e) de 3.14) tem-se então

$$\det_{\mathcal{B}} = \mu^*(\det_{\widehat{\mathcal{B}}}),$$

ou seja, quaisquer que sejam $x_1, \dots, x_n$ em E,

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\widehat{\mathcal{B}}}\big(\mu(x_1), \dots, \mu(x_n)\big).$$

Dem: Temos uma consequência imediata da definição das formas multilineares alternadas determinante uma vez que se tem

$$\mu^*(\det_{\widehat{\mathcal{B}}})(w_1, \dots, w_n) = \det_{\widehat{\mathcal{B}}}\big(\mu(w_1), \dots, \mu(w_n)\big) = 1. \qquad \square$$

4.5 **(Determinante de uma matriz quadrada)** Dado um corpo $\mathbb{K}$, identificamos, como referido em 2.3, a potência $\mathbb{K}^n$ ao espaço das matrizes coluna com n linhas, que possui uma base canónica $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_m$, que é a que se considera implicitamente neste espaço. A correspondente forma multilinear alternada determinante será denotada simplesmente por

$$\det \in A^n(\mathbb{K}^n;\mathbb{K}).$$

Dada uma matriz quadrada M do tipo $n \times n$, podemos considerar a sequência das suas n colunas e definimos o *determinante* $\det(M) \in \mathbb{K}$ da matriz como sendo a forma multilinear alternada det aplicada à sequência das suas matrizes coluna:

$$\det(M) = \det\big(M_{\{1\}}, M_{\{2\}}, \dots, M_{\{n\}}\big).$$

Em particular, o determinante da matriz identidade é igual a 1, uma vez que a sequência das suas colunas é a base canónica de $\mathbb{K}^n$.
Do que dissémos na alínea b) de 4.2 sobre as formas multilineares determinante nos graus 1 e 0 decorre que o determinante duma matriz M do tipo 1×1 é a seu único termo M_1^1 e, para quem for capaz de aceitar a existência de uma matriz do tipo 0×0 (a matriz vazia), que o determinante desta é igual a 1.

4.6 **(Relação entre os dois determinantes)** Seja E um espaço vectorial de dimensão n sobre o corpo $\mathbb{K}$, munido de uma base ordenada $\mathcal{B}$ constituída pelos vectores $w_1, \dots, w_n$. Seja $x_1, \dots, x_n$ uma sequência de n vectores de E e consideremos a matriz M das coordenadas desta sequência de vectores na base $\mathcal{B}$, isto é, a definida por

$$\begin{aligned}
x_1 &= M_1^1 w_1 + M_1^2 w_2 + \cdots + M_1^n w_n,\\
x_2 &= M_2^1 w_1 + M_2^2 w_2 + \cdots + M_2^n w_n,\\
&\cdots\\
x_n &= M_n^1 w_1 + M_n^2 w_2 + \cdots + M_n^n w_n.
\end{aligned}$$

Tem-se então

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n) = \det(M).$$

Dem: Seja $\mu\colon \mathbb{K}^n \to E$ o isomorfismo definido por $\mu(\boldsymbol{e}_j) = w_j$. Tem-se então, lembrando o referido em 2.3,

$$\begin{aligned}
\mu(M_{\{j\}}) &= \mu\big(M_j^1\, \boldsymbol{e}_1 + M_j^2\, \boldsymbol{e}_2 + \cdots + M_j^n\, \boldsymbol{e}_n\big) =\\
&= M_j^1 \mu(\boldsymbol{e}_1) + M_j^2\, \mu(\boldsymbol{e}_2) + \cdots + M_j^n\, \mu(\boldsymbol{e}_n) =\\
&= M_j^1 w_1 + M_j^2 w_2 + \cdots + M_j^n w_n = x_j
\end{aligned}$$

pelo que, tendo em conta 4.4,

$$\begin{aligned}
\det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n) &= \det_{\mathcal{B}}\big(\mu(M_{\{1\}}), \ldots, \mu(M_{\{n\}})\big) =\\
&= \det\big(M_{\{1\}}, M_{\{2\}}, \ldots, M_{\{n\}}\big) = \det(M).
\end{aligned}$$ □

4.7 **(Versão matricial do teorema de Laplace relativo à linha *k*)** Sejam $n \geq 2$ e M uma matriz de tipo $n \times n$ com termos no corpo $\mathbb{K}$. Fixado $1 \leq k \leq n$ tem-se então, denotando $\mathcal{N} = \{1, \ldots, n\}$,

$$\det(M) = \sum_{1 \leq i \leq n} (-1)^{k+i}\, M_i^k \det\big(M_{\mathcal{N}\setminus\{i\}}^{\mathcal{N}\setminus\{k\}}\big),$$

onde $M_{\mathcal{N}\setminus\{i\}}^{\mathcal{N}\setminus\{k\}}$ é a matriz que se obtém de M retirando-lhe a linha k e a coluna i.

Dem: Tendo em conta 4.3, vem

$$\begin{aligned}
\det(M) &= \det(M_{\{1\}}, \ldots, M_{\{n\}}) =\\
&= \sum_{1 \leq i \leq n} (-1)^{k+i}\, \alpha_k(M_{\{i\}}) \det_{\mathcal{B}_k}\big([M_{\{1\}}]_{F_k}, \ldots, \widehat{[M_{\{i\}}]}_{F_k}, \ldots, [M_{\{n\}}]_{F_k}\big),
\end{aligned}$$

onde F_k é o subespaço vectorial de $\mathbb{K}^n$ gerado por $\boldsymbol{e}_k$ e $\mathcal{B}_k$ é a base do espaço vectorial quociente $\frac{\mathbb{K}^n}{F_k}$ constituída pelas classes de equivalência

$$[\boldsymbol{e}_1]_{F_k}, \ldots, [\boldsymbol{e}_{k-1}]_{F_k}, [\boldsymbol{e}_{k+1}]_{F_k}, \ldots, [\boldsymbol{e}_n]_{F_k}.$$

Para obter a conclusão, basta agora reparar que:

1) A interpretação da base associada $\alpha_n, \ldots, \alpha_n$ em (1) de 2.6 e a identidade

$$M_{\{i\}} = M_i^1\, \boldsymbol{e}_1 + M_i^2\, \boldsymbol{e}_2 + \cdots + M_i^n\, \boldsymbol{e}_n$$

em (2) de 2.3 mostram que $\alpha_k(M_{\{i\}}) = M_i^k$.
2) Para cada $j \neq k$, a igualdade

$$M_{\{j\}} = \sum_\ell M_j^\ell \, \boldsymbol{e}_\ell$$

implica que

$$[M_{\{j\}}]_{F_k} = \sum_{\ell \neq k} M_j^\ell \, [\boldsymbol{e}_\ell]_{F_k}$$

e portanto a matriz dos sistema

$$[M_{\{1\}}]_{F_k}, \ldots, [M_{\{i-1\}}]_{F_k}, [M_{\{i+1\}}]_{F_k}, \ldots, [M_{\{n\}}]_{F_k}$$

na base considerada em $\frac{\mathbb{K}^n}{F_k}$ é a matriz que denotámos por $M_{\mathcal{N}\setminus\{i\}}^{\mathcal{N}\setminus\{k\}}$. Tendo em conta 4.6, concluímos portanto que

$$\det_{\mathcal{B}_k}\big([M_{\{1\}}]_{F_k}, \ldots, \widehat{[M_{\{i\}}]_{F_k}}, \ldots, [M_{\{n\}}]_{F_k}\big) = \det\big(M_{\mathcal{N}\setminus\{i\}}^{\mathcal{N}\setminus\{k\}}\big). \qquad \square$$

O teorema de Laplace relativo às diferentes linhas duma matriz vai ser útil em várias situações, seja para calcular efectivamente o determinante de uma matriz, seja para demonstrar, por indução, propriedades que, de outro modo, seriam mais delicadas. Encontramos a seguir alguns exemplos.

4.8 **(Determinante de uma matriz do tipo 2 × 2)** Se M é uma matriz do tipo 2×2 com termos num corpo $\mathbb{K}$, tem-se

$$\det(M) = M_1^1 M_2^2 - M_2^1 M_1^2.$$

Dem: Temos uma consequência direta do teorema de Laplace, por exemplo relativo à primeira linha, se lembrarmos a caracterização do determinante das matrizes do tipo 1×1 referida em 4.5. □

4.9 **(Matrizes com termos num subcorpo ou num subanel unitário)**
a) Consideremos corpos $\mathbb{K}_r \subset \mathbb{K}_c$. Se M é uma matriz com termos no corpo $\mathbb{K}_r$ então $\det(M)$ não se altera quando a considerarmos como matriz com termos no corpo $\mathbb{K}_c$.
b) Consideremos um corpo $\mathbb{K}$ e um subanel unitário $\mathbb{A} \subset \mathbb{K}$. Se M é uma matriz de elementos de $\mathbb{K}$ cujos termos pertencem a $\mathbb{A}$ então $\det(M) \in \mathbb{A}$.[12]
Dem: Em ambos os casos o resultado é trivial para matrizes do tipo 1×1 e o caso geral prova-se por indução na ordem da matriz utilizando o teorema de Laplace em 4.7. □

[12]Como exemplo concreto, o determinante de uma matriz cujos termos são números inteiros é um número inteiro.

4.10 **(Determinante da matriz transposta)** Consideremos uma matriz M de elementos dum corpo $\mathbb{K}$ do tipo $n \times n$, com matriz transposta M^t. Tem-se então

$$\det(M^t) = \det(M).$$

Dem: Tanto no caso em que $n = 0$ como naquele em que $n = 1$, tem-se $M^t = M$ pelo que a conclusão é trivial. Suponhamos agora que $n \geq 2$. Consideremos a aplicação

$$\xi \colon \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \times \cdots \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$$

(n fatores no domínio), definida por

$$\xi(M_{\{1\}}, M_{\{2\}}, \ldots, M_{\{n\}}) = \det(M^t),$$

onde M é a matriz cujas n colunas são $M_{\{1\}}, M_{\{2\}}, \ldots, M_{\{n\}}$. A priori, ξ seria meramente uma aplicação mas vamos agora verificar que se trata de uma aplicação multilinear. Para provar a linearidade na variável de índice k, quando as restantes estão fixadas, recorremos ao teorema de Laplace relativo à linha k, em 4.7, para deduzir que

$$\begin{aligned} &\xi(M_{\{1\}}, M_{\{2\}}, \ldots, M_{\{n\}}) = \det(M^t) = \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} (-1)^{k+i}\, (M^t)^k_i \det\bigl((M^t)^{\mathcal{N}\setminus\{k\}}_{\mathcal{N}\setminus\{i\}}\bigr) = \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} (-1)^{k+i}\, M^i_k \det\Bigl(\bigl(M^{\mathcal{N}\setminus\{i\}}_{\mathcal{N}\setminus\{k\}}\bigr)^t\Bigr) \end{aligned}$$

e, reparando que os coeficientes $\det\Bigl(\bigl(M^{\mathcal{N}\setminus\{i\}}_{\mathcal{N}\setminus\{k\}}\bigr)^t\Bigr)$ não dependem da coluna $M_{\{k\}}$, esta expressão implica a linearidade na variável de índice k. Vamos agora verificar que a aplicação multilinear ξ é alternada. Suponhamos então que $M_{\{i\}} = M_{\{j\}}$ com $i < j$. Para cada $1 \leq k \leq n$ tem-se assim $M^k_i = M^k_j$, ou seja $(M^t)^i_k = (M^t)^j_k$ pelo que as n colunas da matriz M^t são linearmente dependentes por pertencerem ao subespaço próprio de $\mathbb{K}^n$ constituído pelas matrizes coluna com a linha i igual à linha j. Concluímos assim que

$$\xi(M_{\{1\}}, M_{\{2\}}, \ldots, M_{\{n\}}) = \det(M^t) = 0,$$

o que mostra que temos efetivamente uma aplicação multilinear alternada. Considerando agora a base canónica $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ de $\mathbb{K}^n$, constituída pelas colunas da matriz identidade $\mathcal{I}$, o facto de se ter $\mathcal{I}^t = \mathcal{I}$ implica que

$$\xi(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = 1,$$

donde, por definição, ξ é a aplicação multilinear alternada determinante, e portanto

$$\det(M) = \xi(M_{\{1\}}, M_{\{2\}}, \dots, M_{\{n\}}) = \det(M^t). \qquad \square$$

Há ainda outro conceito de determinante, o determinante de um endomorfismo linear de um espaço vectorial E de dimensão n que, apesar de intimamente relacionado com os já estudados, tem sobre estes a vantagem de não depender da fixação de uma base.

4.11 **(O determinante de um endomorfismo linear)** Sejam E um espaço vectorial de dimensão n sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $\lambda\colon E \to E$ uma aplicação linear. Uma vez que o espaço vectorial $A^n(E;\mathbb{K})$ tem dimensão 1 (cf. a alínea b) de 4.2), a aplicação linear

$$\lambda_n^*\colon A^n(E;\mathbb{K}) \to A^n(E;\mathbb{K})$$

(cf. a alínea e) de 3.14) consiste na multiplicação por um elemento de $\mathbb{K}$ bem definido ao qual damos o nome de *determinante* do endomorfismo linear λ, denotado por $\det(\lambda)$. Dado $\xi \neq 0$ em $A^n(E;\mathbb{K})$, $\det(\lambda) \in \mathbb{K}$ fica assim determinado pela condição de se ter

(1) $$\lambda_n^*(\xi) = \det(\lambda)\,\xi$$

ou seja,

(2) $$\xi\big(\lambda(x_1), \dots, \lambda(x_n)\big) = \det(\lambda)\,\xi(x_1, \dots, x_n),$$

quaisquer que sejam $x_1, \dots, x_n$ em E. Em particular, fazendo a ponte com a forma multilinear determinante definida em 4.2, dada uma base $\mathcal{B}$ de E, constituída pelos vectores $w_1, \dots, w_n$, deduzimos de (2) que

(3) $$\det(\lambda) = \det_{\mathcal{B}}\big(\lambda(w_1), \dots, \lambda(w_n)\big).$$

4.12 **(Suplemento para o contexto com dois corpos de escalares)** Suponhamos que temos dois corpos $\mathbb{K}_r \subset \mathbb{K}_c$, que E é um espaço vectorial de dimensão n sobre o corpo $\mathbb{K}_r$ e que $\lambda\colon E \to E$ é uma aplicação linear. Então o escalar $\det(\lambda) \in \mathbb{K}_r$ verifica, mais geralmente,

$$\lambda_n^*(\xi) = \det(\lambda)\,\xi$$

para cada $\xi \in A^n(E;\mathbb{K}_c)$. Basta, com efeito, reparar que $A^n(E;\mathbb{K}_c)$ também tem dimensão 1, como espaço vectorial sobre $\mathbb{K}_c$, e repetir neste contexto o argumento utilizado em 4.11.

4.13 **(Invariância do determinante por isomorfismo II)** Sejam E e $\widehat{E}$ dois espaços vectoriais de dimensão n sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $\mu\colon E \to \widehat{E}$ um isomorfismo. Para cada aplicação linear $\lambda \in L(E;E)$ podemos então considerar a aplicação linear $\mu \circ \lambda \circ \mu^{-1} \in L(\widehat{E};\widehat{E})$ e tem-se

$$\det(\mu \circ \lambda \circ \mu^{-1}) = \det(\lambda).$$

Dem: Para cada $\xi \in A^n(\widehat{E}; \mathbb{K})$ vem $\mu_n^*(\xi) \in A^n(E; \mathbb{K})$, donde

$$(\mu \circ \lambda \circ \mu^{-1})_n^*(\xi) = (\mu^{-1})_n^*\big(\lambda_n^*(\mu_n^*(\xi))\big) = (\mu^{-1})_n^*\big(\det(\lambda)\,\mu_n^*(\xi)\big) =$$
$$= \det(\lambda)\,(\mu^{-1})_n^*\big(\mu_n^*(\xi)\big) = \det(\lambda)\,\xi. \qquad \square$$

4.14 **(Propriedades multiplicativas do determinante)** Seja E um espaço vectorial de dimensão n sobre o corpo $\mathbb{K}$: Então:
a) Dadas aplicações lineares $\lambda, \mu\colon E \to E$,

$$\det(\mu \circ \lambda) = \det(\mu) \times \det(\lambda).$$

b) Sendo $Id_E\colon E \to E$ a aplicação linear identidade, tem-se $\det(Id_E) = 1$.
c) Uma aplicação linear $\lambda\colon E \to E$ é um isomorfismo se, e só se, $\det(\lambda) \neq 0$ e, nesse caso,

$$\det(\lambda^{-1}) = \frac{1}{\det(\lambda)}.$$

d) (Homogeneidade) Se $\lambda\colon E \to E$ é uma aplicação linear e $a \in \mathbb{K}$ então

$$\det(a\lambda) = a^n \det(\lambda).$$

Dem: a) Para cada $\xi \in A^n(E; \mathbb{K})$ vem

$$(\mu \circ \lambda)_n^*(\xi) = \lambda_n^*(\mu_n^*(\xi)) = \det(\lambda)\,\mu_n^*(\xi) = \det(\lambda)\det(\mu)\,\xi.$$

b) Temos uma consequência de se ter $(Id_E)_n^*(\xi) = \xi$ para cada ξ em $A^n(E; \mathbb{K})$.
c) Se λ é isomorfismo então deduzimos de se ter $\lambda^{-1} \circ \lambda = Id_E$ que

$$1 = \det(Id_E) = \det(\lambda^{-1}) \times \det(\lambda)$$

o que implica que $\det(\lambda) \neq 0$ e que $\det(\lambda^{-1})$ é o inverso de $\det(\lambda)$. Se λ não é isomorfismo então, considerando uma base $\mathcal{B}$ de E constituída pelos vectores $w_1, \ldots, w_n$, os vectores $\lambda(w_1), \ldots, \lambda(w_n)$ são linearmente dependentes, por pertencerem ao subespaço vectorial próprio $\lambda(E)$ de E pelo que

$$\det(\lambda) = \det_{\mathcal{B}}\big(\lambda(w_1), \ldots, \lambda(w_n)\big) = 0.$$

d) Considerando uma base $\mathcal{B}$ de E constituída pelos vectores $w_1, \ldots, w_n$, vem

$$\det(a\lambda) = \det_{\mathcal{B}}\big(a\lambda(w_1), \ldots, a\lambda(w_n)\big) =$$
$$= a^n \det_{\mathcal{B}}\big(\lambda(w_1), \ldots, \lambda(w_n)\big) = a^n \det(\lambda). \qquad \square$$

4.15 **(Relação com o determinante das matrizes)** Sejam E um espaço vectorial de dimensão n sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $\lambda\colon E \to E$ uma aplicação linear. Seja $\mathcal{B}$

uma base de E constituída pelos vectores $w_1, \dots, w_n$ e consideremos a matriz M de λ nesta base, definida portanto por

$$\begin{aligned}
&\lambda(w_1) = M_1^1 w_1 + M_1^2 w_2 + \cdots + M_1^m w_m,\\
&\lambda(w_2) = M_2^1 w_1 + M_2^2 w_2 + \cdots + M_2^m w_m,\\
&\cdots\\
&\lambda(w_n) = M_n^1 w_1 + M_n^2 w_2 + \cdots + M_n^m w_m.
\end{aligned}$$

Tem-se então

$$\det(\lambda) = \det(M).$$

Dem: Tendo em conta 4.6 e a caracterização de $\det(\lambda)$ em (3) de 4.11, vem

$$\det(\lambda) = \det_{\mathcal{B}}\big(\lambda(w_1), \dots, \lambda(w_n)\big) = \det(M). \qquad \square$$

4.16 **(Corolário)** Considerando matrizes do tipo $n \times n$ sobre o corpo $\mathbb{K}$, tem-se:
a) $\det(M \times P) = \det(M) \times \det(P)$;
b) $\det(\mathcal{I}) = 1$;
c) Uma matriz M é invertível se, e só se, $\det(M) \neq 0$ e, nesse caso,

$$\det(M^{-1}) = \frac{1}{\det(M)}.$$

d) Se $a \in \mathbb{K}$, vem

$$\det(aM) = a^n \det(M).$$

Dem: Tendo em conta 4.15, temos consequências das alíneas homónimas em 4.14, lembrando as relações usuais entre as aplicações lineares e as suas matrizes numa base dada, incluindo o facto de a matriz da composta de duas aplicações lineares ser o produto das matrizes destas. $\square$

4.17 **(A função norma associada a uma extensão finita de um corpo)**[13] Consideremos corpos $\mathbb{K}_r \subset \mathbb{K}_c$ tais que $\mathbb{K}_c$ seja uma extensão finita de $\mathbb{K}_r$ de grau $k \geq 1$, isto é, tal que $\mathbb{K}_c$ seja um espaço vectorial de dimensão finita k sobre $\mathbb{K}_r$. Define-se então uma função $\mathcal{N}\colon \mathbb{K}_c \to \mathbb{K}_r$, chamada *função norma* associada à extensão, pondo, para cada $a \in \mathbb{K}_c$,

$$\mathcal{N}(a) = \det(\lambda_a) \in \mathbb{K}_r,$$

onde $\lambda_a\colon \mathbb{K}_c \to \mathbb{K}_c$ é a aplicação linear entre $\mathbb{K}_r$-espaços vectoriais definida por $\lambda_a(c) = ac$. Esta aplicação verifica as seguintes condições:
a) Para cada $t \in \mathbb{K}_r$, $\mathcal{N}(t) = t^k$, em particular $\mathcal{N}(0) = 0$ e $\mathcal{N}(1) = 1$.
b) Dados $a, b \in \mathbb{K}_c$, $\mathcal{N}(ab) = \mathcal{N}(a)\,\mathcal{N}(b)$.
c) Se $a \neq 0$ em $\mathbb{K}_c$, então $\mathcal{N}(a) \neq 0$ e $\mathcal{N}(a)^{-1} = \mathcal{N}(a^{-1})$.

[13] Esta função não tem nenhuma relação com as normas usuais que se definem no contexto dos espaços vectoriais reais ou complexos.

d) No caso em que $\mathbb{K}_r = \mathbb{R}$ e $\mathbb{K}_c = \mathbb{C}$, caso em que $k = 2$, tem-se, para cada $z = s + ti$ em $\mathbb{C}$, com $s, t \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{N}(z) = s^2 + t^2 = |z|^2.$$

Dem: a) Uma vez que $\lambda_t(c) = tc = t\,Id_{\mathbb{K}_c}(c)$, resulta de 4.14 que

$$\mathcal{N}(t) = \det(t\,Id_{\mathbb{K}_c}) = t^k \det(Id_{\mathbb{K}_c}) = t^k.$$

b) Temos uma consequência de se ter $\lambda_{ab} = \lambda_a \circ \lambda_b$ (asociatividade da multiplicação no corpo).
c) Uma vez que $a\,a^{-1} = 1$, resulta de a) e b) que

$$\mathcal{N}(a)\,\mathcal{N}(a^{-1}) = \mathcal{N}(1) = 1.$$

d) Uma vez que $\lambda_z(1) = s + ti$ e $\lambda_z(i) = i \times (s + ti) = -t + si$, a matriz de λ_z na base de $\mathbb{C}$ constituída pelos complexos $1, i$ é

$$\begin{bmatrix} s & -t \\ t & s \end{bmatrix}$$

e tem portanto determinante igual a $s^2 + t^2$. □

4.18 **(Determinante da aplicação linear dual)** Consideremos corpos $\mathbb{K}_r \subset \mathbb{K}_c$. Sejam E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}_r$ com dimensão n e $\lambda\colon E \to E$ uma aplicação linear e consideremos a aplicação linear dual

$$\lambda^*\colon L(E; \mathbb{K}_r) \to L(E; \mathbb{K}_r)$$

ou a versão estendida

$$\lambda^*\colon L(E; \mathbb{K}_c) \to L(E; \mathbb{K}_c).$$

Tem-se então, em ambos os casos,

$$\det(\lambda^*) = \det(\lambda).$$

Dem: Fixemos uma base $\mathcal{B}$ de E, constituída pelos vectores $w_1, \ldots, w_n$, e denotemos por $\mathcal{B}$ a base associada de $L(E; \mathbb{K}_r)$ e de $L(E; \mathbb{K}_c)$ constituída pelas aplicações lineares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (cf. 2.6). Basta agora ter em conta 4.15, 4.10 e o facto de, como se verificou em 2.7, a matriz de λ^* ser a transposta da matriz de λ. □

4.19 **(Forma alternada determinante dum subespaço vectorial)** Sejam E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ com dimensão $p + q$ e $F \subset E$ um subespaço vectorial de dimensão p.
Seja $\mathcal{B}$ uma base ordenada de E, constituída pelos vectores

$$w_1, \ldots, w_p, w_{p+1}, \ldots, w_{p+q},$$

tal que os vectores $w_1, \ldots, w_p$ constituam uma base ordenada $\mathcal{B}'$ de F. Então a forma multilinear alternada $\det_{\mathcal{B}'} \in A^p(F; \mathbb{K})$ está definida por

$$\det_{\mathcal{B}'}(x_1, \ldots, x_p) = \det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_p, w_{p+1}, \ldots, w_{p+q}).$$

Dem: É imediato que se pode definir uma forma multilinear alternada $\xi \in A^p(F; \mathbb{K})$ por

$$\xi(x_1, \ldots, x_p) = \det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_p, w_{p+1}, \ldots, w_{p+q})$$

bastando agora atender a que se tem

$$\xi(w_1, \ldots, w_p) = \det_{\mathcal{B}}(w_1, \ldots, w_p, w_{p+1}, \ldots, w_{p+q}) = 1. \qquad \square$$

4.20 **(Forma alternada determinante de um espaço vectorial quociente)** Sejam E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ com dimensão $p+q$ e $F \subset E$ um subespaço vectorial de dimensão q e consideremos o espaço vectorial quociente $\frac{E}{F}$ de dimensão p. Seja $\mathcal{B}$ uma base ordenada de E, constituída pelos vectores

$$w_1, \ldots, w_p, w_{p+1}, \ldots, w_{p+q},$$

tal que os vectores $w_{p+1}, \ldots, w_{p+q}$ constituam uma base de F e lembremos que os vectores $[w_1]_F, \ldots, [w_p]_F$ constituem uma base de $\frac{E}{F}$, que denotaremos por $\widehat{\mathcal{B}}$.[14] Então $\det_{\widehat{\mathcal{B}}} \in A^p(\frac{E}{F}; \mathbb{K})$ está definida por

$$\det_{\widehat{\mathcal{B}}}([x_1]_F, \ldots, [x_p]_F) = \det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_p, w_{p+1}, \ldots, w_{p+q}).$$

Dem: É imediato que se pode definir uma forma multilinear alternada $\eta \in A^p(E; \mathbb{K})$ por

$$\eta(x_1, \ldots, x_p) = \det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_p, w_{p+1}, \ldots, w_{p+q}).$$

Se for $x_i \in F$, para algum $1 \leq i \leq p$, tem-se que $x_1, \ldots, x_p, w_{p+1}, \ldots, w_{p+q}$ são linearmente dependentes uma vez que este sistema tem $q+1$ elementos, nomeadamente $x_i, w_{p+1}, \ldots, w_{p+q}$ no subespaço vectorial F de dimensão q, e por esse motivo vem

$$\eta(x_1, \ldots, x_p) = 0.$$

Tendo em conta o referido em 3.10, podemos assim definir uma forma multilinear $\widehat{\eta}$ de grau p em $\frac{E}{F}$ por

$$\begin{aligned}\widehat{\eta}([x_1]_F, \ldots, [x_p]_F) &= \eta(x_1, \ldots, x_p) = \\ &= \det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_p, w_{p+1}, \ldots, w_{p+q})\end{aligned}$$

e do facto de se ter

[14] Se quiséssemos ser extremamente cuidadosos, a base ordenada de F é formada pelos vectores $z_1, \ldots, z_q$ com $z_j = w_{p+j}$ mas isso é um cuidado que, em geral, nos absteremos de tomar.

$$\widehat{\eta}([w_1]_F, \ldots, [w_p]_F) = \det_{\mathcal{B}}(w_1, \ldots, w_p, w_{p+1}, \ldots, w_{p+q}) = 1$$

deduzimos que $\widehat{\eta} = \det_{\widehat{\mathcal{B}}} \in A^p(\frac{E}{F}; \mathbb{K})$. □

4.21 **(Determinante de uma aplicação linear com um subespaço invariante)** Sejam E um espaço vectorial de dimensão $n = p + q$ sobre $\mathbb{K}$ e $F \subset E$ um subespaço vectorial de dimensão q e consideremos o espaço vectorial quociente $\frac{E}{F}$, de dimensão p.
Seja $\lambda\colon E \to E$ uma aplicação linear tal que $\lambda(F) \subset F$ e consideremos a correspondente aplicação linear $\widehat{\lambda}\colon \frac{E}{F} \to \frac{E}{F}$ definida por $\widehat{\lambda}([x]_F) = [\lambda(x)]_F$ (cf. a alínea c) de 2.8). Tem-se então

$$\det(\lambda) = \det(\lambda_{/F}) \times \det(\widehat{\lambda}).$$

Dem: Seja $\mathcal{B}$ uma base ordenada de E, constituída pelos vectores

$$w_1, \ldots, w_p, w_{p+1}, \ldots, w_{p+q},$$

tal que os vectores $w_{p+1}, \ldots, w_{p+q}$ constituam uma base $\mathcal{B}'$ de F e lembremos que os vectores $[w_1]_F, \ldots, [w_p]_F$ constituem uma base de $\frac{E}{F}$, que denotaremos por $\widehat{\mathcal{B}}$. Definimos uma forma multilinear alternada $\xi \in A^q(F; \mathbb{K})$ por

$$\xi(x_{p+1}, \ldots, x_{p+q}) = \det_{\mathcal{B}}\big(\lambda(w_1), \ldots, \lambda(w_p), x_{p+1}, \ldots, x_{p+q}\big)$$

e resulta da fórmula (2) na alínea b) de 4.2 que se tem

$$\xi = \xi(w_{p+1}, \ldots, w_{p+q}) \det_{\mathcal{B}'},$$

em particular,

$$\begin{aligned}
&\xi\big(\lambda(w_{p+1}), \ldots, \lambda(w_{p+q})\big) = \\
&\qquad = \xi(w_{p+1}, \ldots, w_{p+q}) \det_{\mathcal{B}'}\big(\lambda(w_{p+1}), \ldots, \lambda(w_{p+q})\big) = \\
&\qquad = \xi(w_{p+1}, \ldots, w_{p+q}) \times \det(\lambda_{/F}).
\end{aligned}$$

Deduzimos daqui, tendo em conta 4.20, que

$$\begin{aligned}
\det(\lambda) &= \det_{\mathcal{B}}\big(\lambda(w_1), \ldots, \lambda(w_p), \lambda(w_{p+1}), \ldots, \lambda(w_{p+q})\big) = \\
&= \xi\big(\lambda(w_{p+1}), \ldots, \lambda(w_{p+q})\big) = \\
&= \det(\lambda_{/F}) \times \xi(w_{p+1}, \ldots, w_{p+q}) = \\
&= \det(\lambda_{/F}) \times \det_{\mathcal{B}}\big(\lambda(w_1), \ldots, \lambda(w_p), w_{p+1}, \ldots, w_{p+q}\big) = \\
&= \det(\lambda_{/F}) \times \det_{\widehat{\mathcal{B}}}\big([\lambda(w_1)]_F, \ldots, [\lambda(w_p)]_F\big) = \\
&= \det(\lambda_{/F}) \times \det_{\widehat{\mathcal{B}}}\big(\widehat{\lambda}([w_1]_F), \ldots, \widehat{\lambda}([w_p]_F)\big) = \\
&= \det(\lambda_{/F}) \times \det(\widehat{\lambda}).
\end{aligned}$$

□

4.22 **(Consequência matricial)** Sendo $n = p + q$, consideremos uma matriz M, com termos num corpo $\mathbb{K}$, que admita uma decomposição em blocos da forma

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix},$$

onde a matriz A é do tipo $p \times p$, a matriz de zeros é do tipo $p \times q$, a matriz B é do tipo $q \times p$ e a matriz C é do tipo $q \times q$. Tem-se então

$$\det(M) = \det(A) \times \det(C).$$

Dem: Consideremos um espaço vectorial E de dimensão n sobre $\mathbb{K}$, munido de uma base $w_1, \ldots, w_{p+q}$ (por exemplo $E = \mathbb{K}^n$, com a base canónica) e sejam F o subespaço vectorial gerado por $w_{p+1}, \ldots, w_{p+q}$ e $\lambda: E \to E$ a aplicação linear que tem M como matriz na base considerada, aplicação linear para a qual se tem $\lambda(F) \subset F$. Como referimos na alínea d) de 2.8, a restrição $\lambda_{/F}: F \to F$ admite C como matriz numa base de F e a aplicação linear $\widehat{\lambda}: \frac{E}{F} \to \frac{E}{F}$ obtida por passagem ao quociente admite A como matriz numa base de $\frac{E}{F}$. Tem-se assim

$$\det(M) = \det(\lambda) = \det(\lambda_{/F}) \times \det(\widehat{\lambda}) = \det(C) \times \det(A). \qquad \square$$

4.23 **(Soma direta de subespaços invariantes)** Sejam E um espaço vectorial de dimensão n sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $F \subset E$ e $G \subset E$ dois subespaços vectoriais, com dimensões p e q respectivamente, tais que tenha lugar a soma directa $E = F \oplus G$. Seja $\lambda: E \to E$ uma aplicação linear tal que $\lambda(F) \subset F$ e $\lambda(G) \subset G$. Tem-se então

$$\det(\lambda) = \det(\lambda_{/F}) \times \det(\lambda_{/G}).$$

Dem: Sejam $\mathcal{B}'$ uma base de F, constituída pelos vectores $w_1, \ldots, w_p$, e $\mathcal{B}''$ uma base de G, constituída pelos vectores $w_{p+1}, \ldots, w_{p+q}$, e reparemos que os vectores $w_1, \ldots, w_p, w_{p+1}, \ldots, w_{p+q}$ constituem uma base $\mathcal{B}$ de E na qual λ tem uma matriz da forma

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix},$$

onde A é a matriz de $\lambda_{/F}$ e C a matriz de $\lambda_{/G}$. Tendo em conta 4.22, concluímos assim que

$$\det(\lambda) = \det(M) = \det(A) \times \det(C) = \det(\lambda_{/F}) \times \det(\lambda_{/G}). \qquad \square$$

4.24 **(Determinante de um endomorfismo linear e mudança do corpo dos escalares)** Consideremos dois corpos $\mathbb{K}_r \subset \mathbb{K}_c$ tais que $\mathbb{K}_c$ seja uma extensão finita de grau k de $\mathbb{K}_r$ e seja $\mathcal{N}: \mathbb{K}_c \to \mathbb{K}_r$ a função norma associada (cf. 4.17). Sejam E um espaço vectorial de dimensão n sobre $\mathbb{K}_c$ e $\lambda: E \to E$ uma aplicação linear com determinante $\det_{\mathbb{K}_c}(\lambda) \in \mathbb{K}_c$ e denotemos por

$\det_{\mathbb{K}_r}(\lambda) \in \mathbb{K}_r$ o determinante de λ quando considerada como aplicação linear no contexto do espaço vectorial E de dimensão nk sobre $\mathbb{K}_r$ (cf. 2.10). Tem-se então

$$\det_{\mathbb{K}_r}(\lambda) = \mathcal{N}\big(\det_{\mathbb{K}_c}(\lambda)\big).$$

Por exemplo, lembrando a alínea d) de 4.17, se E for um espaço vectorial de dimensão n sobre $\mathbb{C}$ então E é também um espaço vectorial de dimensão $2n$ sobre $\mathbb{R}$ e tem-se

$$\det_{\mathbb{R}}(\lambda) = \big|\det_{\mathbb{C}}(\lambda)\big|^2.$$

Dem: O caso em que E tem dimensão 0 é trivial, uma vez que ambos os determinantes são iguais a 1. Vamos fazer a demonstração por indução na dimensão n de E como espaço vectorial sobre $\mathbb{K}_c$.
No caso em que $n = 1$, podemos escolher uma base w de E e então $\lambda(w) = aw$ para um certo $a \in \mathbb{K}_c$, tendo-se $\det_{\mathbb{K}_c}(\lambda) = a$. Por outro lado, sendo $\mu\colon \mathbb{K}_c \to E$ o isomorfismo definido por $\mu(c) = cw$, tem-se, na notação de 4.17,

$$\mu \circ \lambda_a(c) = \mu(ac) = a\mu(c) = \lambda(\mu(c)) = \lambda \circ \mu(c),$$

donde $\lambda = \mu \circ \lambda_a \circ \mu^{-1}$ e portanto, por 4.13,

$$\det_{\mathbb{K}_r}(\lambda) = \det_{\mathbb{K}_r}(\lambda_a) = \mathcal{N}(a) = \mathcal{N}\big(\det_{\mathbb{K}_c}(\lambda)\big).$$

Suponhamos o resultado verdadeiro no caso em que o espaço vectorial tem dimensão $n \ge 1$ sobre $\mathbb{K}_c$ e provemo-lo quando essa dimensão é $n+1$.
Examinamos primeiro o caso particular em que λ admite um vector próprio $w \neq 0$, caso em que o subespaço vectorial F gerado por w tem dimensão 1 e verifica $\lambda(F) \subset F$ e em que podemos considerar o espaço vectorial quociente $\frac{E}{F}$ de dimensão n e a aplicação linear $\widehat{\lambda}\colon \frac{E}{F} \to \frac{E}{F}$ obtida por passagem ao quociente. Tendo em conta 4.21 e a hipótese de indução, tem-se então

$$\begin{aligned}\det_{\mathbb{K}_r}(\lambda) &= \det_{\mathbb{K}_r}(\lambda_{/F}) \times \det_{\mathbb{K}_r}(\widehat{\lambda}) = \mathcal{N}\big(\det_{\mathbb{K}_c}(\lambda_{/F})\big) \times \mathcal{N}\big(\det_{\mathbb{K}_c}(\widehat{\lambda})\big) = \\ &= \mathcal{N}\big(\det_{\mathbb{K}_c}(\lambda_{/F}) \times \det_{\mathbb{K}_c}(\widehat{\lambda})\big) = \mathcal{N}\big(\det_{\mathbb{K}_c}(\lambda)\big).\end{aligned}$$

Examinamos, por fim, o caso geral em que não supomos a existência de vector próprio não nulo para λ. Nesse caso, aplicamos "lema com aplicação adiada" em 2.11 para considerar aplicações lineares $\lambda', \lambda''\colon E \to E$, cada uma das quais verificando a condição particular referida anteriormente, tais que $\lambda = \lambda' \circ \lambda''$ e, utilizando o que já se provou nesse caso particular, vemos que

$$\begin{aligned}\det_{\mathbb{K}_r}(\lambda) &= \det_{\mathbb{K}_r}(\lambda') \times \det_{\mathbb{K}_r}(\lambda'') = \mathcal{N}\big(\det_{\mathbb{K}_c}(\lambda')\big) \times \mathcal{N}\big(\det_{\mathbb{K}_c}(\lambda'')\big) = \\ &= \mathcal{N}\big(\det_{\mathbb{K}_c}(\lambda') \times \det_{\mathbb{K}_c}(\lambda'')\big) = \mathcal{N}\big(\det_{\mathbb{K}_c}(\lambda)\big).\end{aligned}$$

□

4.25 **(Exercícios) 1)** Determinar uma fórmula explícita para o determinante de uma matriz do tipo 3×3.

2) Seja E um espaço vectorial sobre o corpo $\mathbb{K}$, munido de uma base $\mathcal{B}$ constituída pelos vectores w_1, w_2 e sejam $\alpha_1, \alpha_2 \in L(E; \mathbb{K})$ os elementos da respectiva base dual. Verificar que, dados vectores $x_1, x_2 \in E$,

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2) = \alpha_1(x_1)\alpha_2(x_2) - \alpha_1(x_2)\alpha_2(x_1).$$

3) Seja M uma matriz de números complexos e denotemos por $\overline{M}$ a matriz cujos termos são os complexos conjugados dos termos correspondentes de M. Mostrar que $\det(\overline{M})$ é o complexo conjugado de $\det(M)$. Generalizar este resultado descobrindo qual a propriedade fundamental da conjugação que intervém na demonstração.

4) Utilizar a igualdade do determinante de uma matriz quadrada e da sua transposta para obter um "teorema de Laplace relativo à coluna k" análogo ao examinado em 4.7.

§5. Formas alternadas de grau inferior e produto exterior

Verificámos na secção 4 que, dados corpos $\mathbb{K}_r \subset \mathbb{K}_c$ e um espaço vectorial E de dimensão n sobre o corpo $\mathbb{K}_r$, o espaço vectorial $A^n(E; \mathbb{K}_c)$ das formas multilineares alternadas de grau n tem dimensão 1 e possui uma base natural associada a uma base que se considere em E. Já verificáramos antes, na alínea c) de 3.14, que $A^p(E; \mathbb{K}_c) = \{0\}$ sempre que $p > n$. O objectivo principal da presente secção é o de examinar os espaços $A^p(E; \mathbb{K}_c)$ no caso em que $p < n$. Paralelamente ao facto de o estudo do caso $p = n$ se ter baseado no lema 4.1, o estudo do caso em que $p < n$ vai depender duma generalização desse lema, cuja demonstração se se baseia na deste (com uma parte substancial obtida por "copy paste").

5.1 **(Lema do desenrascanço bis)** Consideremos corpos $\mathbb{K}_r \subset \mathbb{K}_c$. Sejam E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}_r$ de dimensão $n \geq 2$, $w \neq 0$ fixado em E e $F \subset E$ o subespaço de dimensão 1 gerado por w e consideremos o espaço vectorial quociente $\frac{E}{F}$, que sabemos ter dimensão $n - 1$. Seja $2 \leq p \leq n$.

a) Existe uma aplicação linear sobrejectiva entre espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}_c$

$$\Psi_w \colon A^p(E; \mathbb{K}_c) \to A^{p-1}(\frac{E}{F}; \mathbb{K}_c)$$

definida por

$$\Psi_w(\xi)([x_1]_F, \ldots, [x_{p-1}]_F) = \xi(x_1, \ldots, x_{p-1}, w),$$

cujo kernel é o subespaço vectorial $A^p_F(E; \mathbb{K}_c)$ que é isomorfo a $A^p(\frac{E}{F}; \mathbb{K}_c)$

(cf. a alínea d) de 3.14).[15]
b) Fixada uma aplicação linear $\alpha\colon E \to \mathbb{K}$ tal que $\alpha(w) = 1$, pode definir-se uma aplicação linear entre espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}_c$

$$\Phi\colon A^{p-1}(\frac{E}{F}; \mathbb{K}_c) \to A^p(E; \mathbb{K}_c)$$

pondo

$$\begin{aligned}&\Phi(\eta)(x_1, \ldots, x_p) = \\ &= \sum_{1 \le i \le p} (-1)^{p+i}\, \alpha(x_i)\, \eta\big([x_1]_F, \ldots, \widehat{[x_i]_F}, \ldots, [x_p]_F\big),\end{aligned}$$

aplicação para a qual $\Psi_w \circ \Phi$ é igual à identidade de $A^{p-1}(\frac{E}{F}; \mathbb{K}_c)$.
Dem: 1) O facto de, para cada $\xi \in A^p(E; \mathbb{K}_c)$, $\Psi_w(\xi)$ ser uma forma multilinear alternada de grau $p-1$ sobre $\frac{E}{F}$ bem definida resulta do que foi referido na alínea d) de 3.14, uma vez que tem lugar uma forma multilinear alternada de grau $p-1$

$$(x_1, \ldots, x_{p-1}) \mapsto \xi(x_1, \ldots, x_{p-1}, w)$$

que se anula quando $x_j \in F$ para algum $j \le p-1$, já que o sistema $x_1, \ldots, x_{p-1}, w$ é então linearmente dependente, por ter dois vectores no subespaço vectorial F de dimensão 1. É trivial constatar que a aplicação

$$\Psi_w\colon A^p(E; \mathbb{K}_c) \to A^{p-1}(\frac{E}{F}; \mathbb{K}_c)$$

assim definida é linear.
2) É imediato que se $\xi \in A^p_F(E; \mathbb{K}_c)$ então $\Psi_w(\xi) = 0$. Reciprocamente, se for $\Psi_w(\xi) = 0$ então $\xi \in A^p_F(E; \mathbb{K}_c)$ visto que, dados $x_1, \ldots, x_p$ com $x_i \in F$ para algum i, vem $x_i = aw$ donde

$$\begin{aligned}\xi(x_1, \ldots, x_p) &= (-1)^{n-p}\, \xi(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_i) = \\ &= (-1)^{n-p}\, a\, \Psi_w(\xi)([x_1]_F, \ldots, \widehat{[x_i]_F}, \ldots, [x_p]_F) = 0.\end{aligned}$$

Provámos assim que o kernel de Ψ_w é efectivamente $A^p_F(E; G)$ que, pela alínea d) de 3.14, é isomorfo a $A^p(\frac{E}{F}; \mathbb{K}_c)$.
3) Fixemos agora uma aplicação linear $\alpha\colon E \to \mathbb{K}_r$ tal que $\alpha(w) = 1$. Para cada

$$\eta \in A^{p-1}(\frac{E}{F}; \mathbb{K}_c)$$

[15] Repare-se que, no caso em que $p = n$, o facto de $\frac{E}{F}$ ter dimensão $n-1$ implica que $A^p(\frac{E}{F}; \mathbb{K}_c) = \{0\}$ pelo que fica explicado o facto de em 4.1 se afirmar a injectividade de Ψ_w.

consideremos a aplicação multilinear $\Phi(\eta)\colon E^p \to \mathbb{K}_c$ definida por

$$\begin{aligned}&\Phi(\eta)(x_1,\ldots,x_p) =\\ &= \sum_{1\le i\le p} (-1)^{p+i}\,\alpha(x_i)\,\eta\big([x_1]_F,\ldots,\widehat{[x_i]}_F,\ldots,[x_p]_F\big).\end{aligned}$$

Vamos utilizar 3.15 para verificar que esta aplicação multilinear é alternada para o que supomos que se tem $x_j = x_{j+1}$ para um certo $j < p$. Na soma de p parcelas que caracteriza $\Phi(\eta)(x_1,\ldots,x_p)$ só duas não são necessariamente nulas, as correspondentes a $i = j$ e a $i = j+1$, visto que em cada uma das restantes o elemento $[x_j]_F = [x_{j+1}]_F$ aparece em duas posições nos argumentos de η. Vemos assim que

$$\begin{aligned}&\Phi(\eta)(x_1,\ldots,x_p) =\\ &= (-1)^{p+j}\,\alpha(x_j)\,\eta\big([x_1]_F,\ldots,[x_{j-1}]_F,[x_{j+1}]_F,[x_{j+2}]_F\ldots,[x_p]_F\big) +\\ &\quad + (-1)^{p+j+1}\,\alpha(x_{j+1})\,\eta\big([x_1]_F,\ldots,[x_{j-1}]_F,[x_j]_F,[x_{j+2}]_F,\ldots,[x_p]_F\big) =\\ &= 0,\end{aligned}$$

uma vez que $\alpha(x_j) = \alpha(x_{j+1})$ e $[x_j]_F = [x_{j+1}]_F$.

4) O que vimos em 3) mostra que temos uma aplicação

$$\Phi\colon A^{p-1}(\frac{E}{F};\mathbb{K}_c) \to A^p(E;\mathbb{K}_c).$$

Vamos agora mostrar que $\Psi_w \circ \Phi$ é a identidade de $A^{p-1}(\frac{E}{F};\mathbb{K}_c)$, o que provará, em particular, que a aplicação linear Ψ_w é sobrejectiva. Ora, dado $\eta \in A^{p-1}(\frac{E}{F};\mathbb{K}_c)$, vem, reparando que $[w]_F = 0$ e que $\alpha(w) = 1$,

$$\begin{aligned}&(\Psi_w\circ\Phi)(\eta)\big([x_1]_F,\ldots,[x_{p-1}]_F\big) =\\ &= \Phi(\eta)(x_1,\ldots,x_{p-1},w) =\\ &= \Big(\sum_{1\le i\le p-1} (-1)^{p+i}\,\alpha(x_i)\,\eta\big([x_1]_F,\ldots,\widehat{[x_i]_F},\ldots,[x_{w-1}]_F,[w]_F\big)\Big) +\\ &\quad + (-1)^{p+p}\,\alpha(w)\,\eta\big([x_1]_F,\ldots,[x_{p-1}]_F\big) =\\ &= \eta\big([x_1]_F,\ldots,[x_{p-1}]_F\big),\end{aligned}$$

ou seja, $(\Psi_w\circ\Phi)(\eta) = \eta$. □

5.2 **(Aplicação ao estudo de $A^p(E;\mathbb{K}_c)$)** Consideremos corpos $\mathbb{K}_r \subset \mathbb{K}_c$. Sejam E um espaço vectorial de dimensão n sobre o corpo $\mathbb{K}_r$ e $\mathcal{B}$ uma base ordenada de E, constituída pelos vectores $w_1,\ldots,w_n$. Seja $0 \le p \le n$ e denotemos por $\mathcal{P}_{n,p}$ o conjunto das partes $I \subset \{1,\ldots,n\}$ com p elementos que, como sabemos, tem um número de elementos igual ao número de combinações ${}^n\mathrm{C}_p$. Recordemos que, como referido em 2.2, para cada $I \in \mathcal{P}_{n,p}$, denotamos por $I_1, I_2, \ldots, I_p$ os elementos de I postos por ordem.

a) A aplicação linear entre espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}_c$

$$\textbf{(1)}\qquad \Theta_{\mathcal{B},p}\colon A^p(E;\mathbb{K}_c) \to \prod_{I\in\mathcal{P}_{n,p}} \mathbb{K}_c$$

definida por

$$\big(\Theta_{\mathcal{B},p}(\xi)\big)_I = \xi(w_{I_1}, w_{I_2}, \ldots, w_{I_p})$$

é então um isomorfismo, em particular $A^p(E;\mathbb{K}_c)$ tem dimensão ${}^n\mathrm{C}_p$. Este isomorfismo aplica $A^p(E;\mathbb{K}_r)$ sobre $\prod\limits_{I\in\mathcal{P}_{n,p}} \mathbb{K}_r$.

b) (Binet–Cauchy escondido com a cauda de fora) O espaço vectorial $A^p(E;\mathbb{K}_c)$ sobre $\mathbb{K}_c$ admite uma base indexada em $\mathcal{P}_{n,p}$ que a $I\in\mathcal{P}_{n,p}$ associa a única forma multilinear alternada

$$\det_{\mathcal{B},I} \in A^p(E;\mathbb{K}_r) \subset A^p(E;\mathbb{K}_c)$$

que verifica

$$\textbf{(2)}\qquad \det_{\mathcal{B},I}(w_{I'_1}, \ldots, w_{I'_p}) = \begin{cases} 1, & \text{se } I' = I \\ 0, & \text{se } I' \neq I \end{cases},$$

para cada $I'\in\mathcal{P}_{n,p}$.[16] Além disso, para cada $\xi\in A^p(E;\mathbb{K}_c)$, tem-se

$$\textbf{(3)}\qquad \xi = \sum_{I\in\mathcal{P}_{n,p}} \xi(w_{I_1}, \ldots, w_{I_p}) \det_{\mathcal{B},I}.$$

c) No caso em que $p = n$, existe um único $I\in\mathcal{P}_{n,n}$, nomeadamente $I = \{1,\ldots,n\}$ e $\det_{\mathcal{B},I} \in A^n(E;\mathbb{K}_r)$ é a forma multilinear determinante $\det_{\mathcal{B}}$ definida na alínea b) de 4.2.
d) No caso em que $p = 1$, os elementos

$$\det_{\mathcal{B},\{i\}} \in A^1(E;\mathbb{K}_r) = L(E;\mathbb{K}_r)$$

são os elementos α_i da base de $L(E;\mathbb{K}_c)$ associada à base $\mathcal{B}$ de E (cf. 2.6).
Dem: a) É imediato que $\Theta_{\mathcal{B},p}$ é uma aplicação linear pelo que o que temos que mostrar é que se trata mesmo de um isomorfismo. Comecemos por notar que o resultado é trivial quando $p = 0$, caso em que $\Theta_{\mathcal{B},p}$ é simplesmente a identidade, e que a sua validade para $p = 1$ resulta do facto bem conhecido de uma aplicação linear ficar determinada pelas imagens arbitrárias que devem ter os elementos de uma base. Vamos agora provar o facto de $\Theta_{\mathcal{B},p}$ ser um isomorfismo por indução na dimensão n de E, começando por reparar que as observações precedentes mostram que o resultado é verdadeiro quando $n = 0$ e quando $n = 1$. Seja $n \geq 2$ tal que a propriedade valha nos espaços vectoriais de dimensão $n-1$ e provemo-lo quando E tem dimensão n, podendo já supor-se que $p \geq 2$. Com o objetivo de aplicar o lema 5.1,

[16] Trata-se assim de uma base não ordenada.

consideremos $w = w_n$ e, no espaço vectorial $\frac{E}{F}$ de dimensão $n-1$, a base ordenada constuída pelos vectores $[w_1]_F, \ldots, [w_{n-1}]_F$. Notamos agora que, pelo lema referido, a aplicação linear sobrejectiva

$$\Psi_w: A^p(E; \mathbb{K}_c) \to A^{p-1}(\frac{E}{F}; \mathbb{K}_c),$$

cujo espaço de chegada tem, pela hipótese de indução, dimensão ${}^{n-1}\mathrm{C}_{p-1}$, tem como kernel o espaço vectorial $A^p_F(E; \mathbb{K}_c)$ que é isomorfo a $A^p(\frac{E}{F}; \mathbb{K}_c)$ e portanto, mais uma vez pela hipótese de indução, tem dimensão ${}^{n-1}\mathrm{C}_p$. Resulta daqui que $A^p(E; \mathbb{K}_c)$ tem dimensão

$${}^{n-1}\mathrm{C}_{p-1} + {}^{n-1}\mathrm{C}_p = {}^n\mathrm{C}_p.$$

Para mostrarmos que a aplicação linear (1) é um isomorfismo bastará assim mostrar que se trata de uma aplicação linear injectiva. Seja então $\xi \in A^p(E; \mathbb{K}_c)$ tal que para cada $I \in \mathcal{P}_{n,p}$ se tenha

$$\xi(w_{I_1}, w_{I_2}, \ldots, w_{I_p}) = 0.$$

Para cada $I \in \mathcal{P}_{n-1,p-1}$ podemos então considerar $I' = I \cup \{n\} \in \mathcal{P}_{n,p}$ e vem

$$\begin{aligned}\Psi_w(\xi)([w_{I_1}]_F, \ldots, [w_{I_{p-1}}]_F) &= \xi(w_{I_1}, \ldots, w_{I_{p-1}}, w) = \\ &= \xi(w_{I'_1}, \ldots, w_{I'_{p-1}}, w_{I'_p}) = 0\end{aligned}$$

pelo que a hipótese de indução implica que $\psi_w(\xi) = 0$ ou seja, pelo lema 5.1, $\xi \in A^p_F(E; \mathbb{K}_c)$, podendo assim considerar-se a correspondente forma multilinear alternada $\widehat{\xi} \in A^p(\frac{E}{F}; \mathbb{K}_c)$, para a qual se tem

$$\xi(x_1, \ldots, x_p) = \widehat{\xi}([x_1]_F, \ldots, [x_p]_F).$$

Para cada $I \in \mathcal{P}_{n-1,p}$ tem-se então

$$\widehat{\xi}([w_{I_1}]_F, \ldots, [w_{Ip}]_F) = \xi(w_{I_1}, w_{I_2}, \ldots, w_{I_p}) = 0$$

pelo que, mais uma vez pela hipótese de indução, tem-se $\widehat{\xi} = 0$, donde $\xi = 0$. Provámos assim que a aplicação linear (1) é efectivamente injectiva. O facto de $\Theta_{\mathcal{B},p}$ aplicar $A^p(E; \mathbb{K}_r)$ sobre $\prod\limits_{I \in \mathcal{P}_{n,p}} \mathbb{K}_r$ resulta de que não estamos impedidos de considerar para $\mathbb{K}_c$ o próprio $\mathbb{K}_r$.

b) O facto de ficarem bem definidas formas multilineares alternadas $\det_{\mathcal{B},I}$ pela condição (2) resulta de que $\Theta_{\mathcal{B},p}$, como se verificou em a), é um isomorfismo. O facto de estes elementos constituirem uma base de $A^p(E; \mathbb{K}_c)$ resulta de as suas imagens pelo isomorfismo $\Theta_{\mathcal{B},p}$ constituirem a base canónica de $\prod\limits_{I \in \mathcal{P}_{n,p}} \mathbb{K}_c$. Vemos agora que, dado $\xi \in A^p(E; \mathbb{K}_c)$, existem escalares $b_I \in \mathbb{K}_c$, $I \in \mathcal{P}_{n,p}$, tais que $\xi = \sum_I b_I \det_{\mathcal{B},I}$ e então

$$\xi(w_{I'_1}, \ldots, w_{I'_p}) = \sum_{I \in \mathcal{P}_{n,p}} b_I \det_{\mathcal{B},I}(w_{I'_1}, \ldots, w_{I'_p}) = b_{I'}.$$

c) e d) Temos consequências imediatas das definições, que foram enunciadas apenas para referência futura. □

5.3 **(Caracterização das formas alternadas $\det_{\mathcal{B},I} \in A^p(E;\mathbb{K})$)** Sejam E um espaço vectorial de dimensão $n = p + q$ sobre o corpo $\mathbb{K}$, no qual consideramos uma base $\mathcal{B}$ constituída pelos vectores $w_1, \ldots, w_n$, e $I \in \mathcal{P}_{n,p}$. Denotemos $\overline{I} = \{1, \ldots, n\} \setminus I$, e consideremos o subespaço vectorial $\overline{F} \subset E$ gerado pelos vectores $w_{\overline{I}_1}, \ldots, w_{\overline{I}q}$ e no espaço vectorial quociente $\frac{E}{\overline{F}}$ a base ordenada $\mathcal{B}_I$ constituída pelos vectores $[w_{I_1}]_{\overline{F}}, \ldots, [w_{I_p}]_{\overline{F}}$. Tem-se então

(1) $$\det_{\mathcal{B},I}(x_1, \ldots, x_p) = \det_{\mathcal{B}_I}\big([x_1]_{\overline{F}}, \ldots, [x_p]_{\overline{F}}\big),$$

por outras palavras, sendo $\overline{\rho}\colon E \to \frac{E}{\overline{F}}$ a projeção canónica,

$$\det_{\mathcal{B},I} = \overline{\rho}^*\big(\det_{\mathcal{B}_I}\big).$$

Repare-se que, sendo M a matriz do tipo $n \times p$ cuja coluna j é constituída pelas coordenadas de x_j na base $\mathcal{B}$, o segundo membro de (1) é o determinante da matriz quadrada M^I (cf. a notação em 2.1).

Dem: Consideremos o elemento $\xi \in A^p(E;\mathbb{K})$ definido por

$$\xi(x_1, \ldots, x_p) = \det_{\mathcal{B}_I}\big([x_1]_{\overline{F}}, \ldots, [x_p]_{\overline{F}}\big),$$

o qual não é mais do que a imagem recíproca $\overline{\rho}^*\big(\det_{\mathcal{B}_I}\big) \in A^p\big(\frac{E}{\overline{F}};\mathbb{K}\big)$ pela projeção canónica $\overline{\rho}\colon E \to \frac{E}{\overline{F}}$. Resta-nos mostrar que ξ verifica as condições que determinam $\det_{\mathcal{B},I}$.

Ora, por definição, vem

$$\xi(w_{I_1}, \ldots, w_{I_p}) = \det_{\mathcal{B}_I}([w_{I_1}]_{\overline{F}}, \ldots, [w_{Ip}]_{\overline{F}}) = 1$$

e, por outro lado, se $I' \neq I$ em $\mathcal{P}_{n,p}$ existe j tal que $I'_j \notin I$ e portanto $[w_{I'_j}]_{\overline{F}} = 0$ pelo que

$$\xi(w_{I'_1}, \ldots, w_{I'_p}) = \det_{\mathcal{B}_I}([w_{I'_1}]_{\overline{F}}, \ldots, [w_{I'_p}]_{\overline{F}}) = 0.$$

A interpretação matricial resulta de que, sendo

$$x_j = M_j^1 w_1 + \cdots + M_j^n w_n,$$

tem-se

$$[x_j]_{\overline{F}} = M_j^{I_1}[w_{I_1}]_{\overline{F}} + \cdots + M_j^{I_p}[w_{I_p}]_{\overline{F}}.$$ □

5.4 **(Versão vectorial do teorema de Binet–Cauchy)** Sejam E um espaço vectorial de dimensão n sobre o corpo $\mathbb{K}$ munido de uma base $\mathcal{B}$, constituída pelos vectores $w_1, \ldots, w_n$, e $\widehat{E}$ um espaço vectorial de dimensão $p \leq n$ sobre $\mathbb{K}$ munido de uma base $\widehat{\mathcal{B}}$, constituída pelos vectores $z_1, \ldots, z_p$. Sejam $\lambda\colon \widehat{E} \to E$ e $\mu\colon E \to \widehat{E}$ duas aplicações lineares. Tem-se então

$$\det(\mu \circ \lambda) = \sum_{I \in \mathcal{P}_{n,p}} \det_{\widehat{\mathcal{B}}}\big(\mu(w_{I_1}), \ldots, \mu(w_{I_p})\big) \det_{\mathcal{B},I}\big(\lambda(z_1), \ldots, \lambda(z_p)\big).$$

Dem: Aplicando a alínea b) de 5.2 a $\mu^*(\det_{\widehat{\mathcal{B}}}) \in A^p(E;\mathbb{K})$, vemos que

$$\mu^*(\det_{\widehat{\mathcal{B}}}) = \sum_{I \in \mathcal{P}_{n,p}} \mu^*(\det_{\widehat{\mathcal{B}}})(w_{I_1}, \ldots, w_{I_p}) \det_{\mathcal{B},I}$$

e portanto

$$\begin{aligned}\det(\mu \circ \lambda) &= \det_{\widehat{\mathcal{B}}}\big(\mu(\lambda(z_1)), \ldots, \mu(\lambda(z_p))\big) = \\ &= \mu^*(\det_{\widehat{\mathcal{B}}})\big(\lambda(z_1), \ldots, \lambda(z_p)\big) = \\ &= \sum_{I \in \mathcal{P}_{n,p}} \mu^*(\det_{\widehat{\mathcal{B}}})(w_{I_1}, \ldots, w_{Ip}) \det_{\mathcal{B},I}\big(\lambda(z_1), \ldots, \lambda(z_p)\big) = \\ &= \sum_{I \in \mathcal{P}_{n,p}} \det_{\widehat{\mathcal{B}}}(\mu(w_{I_1}), \ldots, \mu(w_{Ip})\big) \det_{\mathcal{B},I}(\lambda(z_1), \ldots, \lambda(z_p)).\end{aligned}$$ □

5.5 **(Versão matricial do teorema de Binet–Cauchy)** Seja $p \leq n$ e consideremos duas matrizes com termos num corpo $\mathbb{K}$, A de tipo $p \times n$ e B de tipo $n \times p$. Tem-se então, com as notações referidas em 2.1,

$$\det(A \times B) = \sum_{I \in \mathcal{P}_{n,p}} \det(A_I) \times \det(B^I).$$

Dem: Consideremos espaços vectoriais E e $\widehat{E}$, munidos de bases $\mathcal{B}$ e $\widehat{\mathcal{B}}$ nas condições e notações de 5.4, por exemplo $E = \mathbb{K}^n$ e $\widehat{E} = \mathbb{K}^p$ com as bases canónicas, e sejam $\lambda\colon \widehat{E} \to E$ e $\mu\colon E \to \widehat{E}$ as aplicações lineares que têm matrizes B e A, respectivamente, nas bases referidas. Tem-se então $\det(\mu \circ \lambda) = \det(A \times B)$,

$$\det_{\widehat{\mathcal{B}}}(\mu(w_{I_1}), \ldots, \mu(w_{Ip})\big) = \det(A_I)$$

e, tendo em conta o referido em 5.3,

$$\det_{\mathcal{B},I}(\lambda(z_1), \ldots, \lambda(z_p)) = \det(B^I),$$

pelo que a conclusão resulta da fórmula obtida em 5.4. □

No que segue vai ser importante associar a cada conjunto finito I de números naturais positivos um *sinal*, isto é, um elemento do conjunto

$\{-1, 1\}$. Definimos em seguida essa associação e apontamos algumas das suas propriedades básicas.

5.6 **(O sinal dum conjunto finito)** Seja I um conjunto finito de números naturais positivos com p elementos e denotemos, como antes, por $I_1, \ldots, I_p$ os elementos de I considerados por ordem crescente. Vamos definir o *sinal* de I, denotado por $(-1)^I$ ou $\mathrm{sgn}(I)$, [17] como sendo o elemento de $\{-1, 1\}$

$$(-1)^I = (-1)^{(I_1-1)+(I_2-2)+\cdots+(I_p-p)}.$$

Registamos em seguida algumas propriedades simples da noção de sinal dum conjunto.

a) (Casos particulares) Tem-se

$$\begin{aligned}(-1)^{\{i\}} &= (-1)^{i-1},\\ (-1)^{\emptyset} &= (-1)^0 = 1,\\ (-1)^{\{1,2,\ldots,p\}} &= (-1)^0 = 1.\end{aligned}$$

b) (Fórmula alternativa) Tem-se também

$$(-1)^I = (-1)^{(I_1+\cdots+Ip)-(1+\cdots+p)}$$

o que nos permite concluir que, quando $I = \{i_1, \ldots, i_p\}$ tem p elementos, sem que os elementos $i_1, \ldots, i_p$ tenham que estar por ordem crescente, vem ainda

(1)
$$\begin{aligned}(-1)^I &= (-1)^{(i_1+\cdots+i_p)-(1+\cdots+p)} =\\ &= (-1)^{(i_1-1)+(i_2-2)+\cdots+(i_p-p)}.\end{aligned}$$

c) Dados conjuntos I, com p elementos, e J, com q elementos, tais que $I \cap J = \emptyset$, tem-se

(2)
$$(-1)^{I\cup J} = (-1)^{pq} \times (-1)^I \times (-1)^J.$$

Em consequência, no caso em que $I \subset \{1, \ldots, n\}$, com $n = p + q$, e consideramos o complementar $\overline{I} = \{1, \ldots, n\} \setminus I$, que tem q elementos, vem

(3)
$$(-1)^{\overline{I}} = (-1)^{pq} \times (-1)^I.$$

Dem: Tendo em conta a fórmula (1) na alínea b) acima,

---

[17] Usaremos preferencialmente a primeira para sublinhar que não estamos a utilizar uma definição equivalente que passa pelo sinal de uma permutação associada (uma permutação do “tipo baralhar”).

$$\begin{aligned}(-1)^{I\cup J} &= (-1)^{(I_1+\cdots+I_p+J_1+\cdots+J_q)-(1+\cdots+p+(p+1)+\cdots+(p+q))} =\\ &= (-1)^{(I_1+\cdots+I_p)-(1+\cdots+p)} \times (-1)^{(J_1+\cdots+J_q)-pq-(1+\cdots+q)} =\\ &= (-I)^I \times (-1)^J \times (-1)^{-pq}.\end{aligned}$$

Quanto à segunda fórmula atendemos a que, por ser $\{1,\ldots,n\} = I \cup \overline{I}$, com $I \cap \overline{I} = \emptyset$, vem

$$1 = (-1)^{\{1,\ldots,n\}} = (-1)^{pq} \times (-1)^I \times (-1)^{\overline{I}}$$

e lembramos que, para elementos de $\{-1,1\}$, multiplicar é o mesmo que dividir. □

Como primeira aplicação do sinal, enunciamos três resultados, dos quais os dois primeiros já poderiam ter aparecido no contexto da secção 3.

5.7 **(Divisão dos argumentos em dois pacotes)** Consideremos corpos $\mathbb{K}_r \subset \mathbb{K}_c$. Sejam $n = p + q$, E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}_r$, $\xi \in A^n(E;\mathbb{K}_c)$ e $I \in \mathcal{P}_{n,p}$, com o correspondente

$$\overline{I} = \{1,\ldots,n\} \setminus I \in \mathcal{P}_{n,q}.$$

Dados $x_1,\ldots,x_n \in E$, tem-se então

$$\xi(x_{I_1},\ldots,x_{I_p},x_{\overline{I}_1},\ldots,x_{\overline{I}_q}) = (-1)^I \times \xi(x_1,\ldots,x_n).$$

Dem: O resultado é trivial nos casos em que $p = 0$ e em que $q = 0$, em ambos os casos vindo $(-1)^I = 1$. Vamos provar o resultado por indução em n, a observação precedente mostrando que ele é automaticamente verdadeiro nos casos em que $n = 0$ e em que $n = 1$. Suponhamos o resultado verdadeiro no caso em que temos $n-1$ variáveis e provemo-lo no caso em que temos n variáveis. Dois casos são possíveis:
Caso 1: Suponhamos que $n \in \overline{I}$, e portanto $n = \overline{I}_q$. Considerando x_n fixado e a aplicação multilinear alternada $\widehat{\xi} \in A^{n-1}(E;\mathbb{K}_c)$ definida por

$$\widehat{\xi}(x_1,\ldots,x_{n-1}) = \xi(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n),$$

tem-se então, aplicando a hipótese de indução,

$$\begin{aligned}\xi(x_{I_1},\ldots,x_{I_p},x_{\overline{I}_1},\ldots,x_{\overline{I}_q}) &= \widehat{\xi}(x_{I_1},\ldots,x_{I_p},x_{\overline{I}_1},\ldots,x_{\overline{I}_{q-1}}) =\\ &= (-1)^I \times \widehat{\xi}(x_1,\ldots,x_{n-1}) = (-1)^I \times \xi(x_1,\ldots,x_n).\end{aligned}$$

Caso 2: Suponhamos que $n \in I$, e portanto $n = I_p$. Consideremos $I' = I \setminus \{n\}$, tendo-se assim $\overline{I'} = \overline{I} \cup \{n\}$. Reparando que

$$(-1)^I = (-1)^{I'} \times (-1)^{I_p - p} = (-1)^{I'} \times (-1)^q,$$

obtemos, aplicando o caso 1 e a igualdade (3) na alínea b) de 3.14,

$$\xi(x_{I_1},\dots,x_{I_p},x_{\overline{I}_1},\dots,x_{\overline{I}_q}) = (-1)^q\,\xi(x_{I'_1},\dots,x_{I'_{p-1}},x_{\overline{I'}_1},\dots,x_{\overline{I'}_{q+1}}) =$$
$$= (-1)^q \times (-1)^{I'} \times \xi(x_1,\dots,x_n) = (-1)^I \times \xi(x_1,\dots,x_n). \qquad \square$$

5.8 **(Corolário — Troca dos pacotes)** Consideremos corpos $\mathbb{K}_r \subset \mathbb{K}_c$. Sejam $n = p+q$, E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}_r$ e $\xi \in A^n(E;\mathbb{K}_c)$. Dados vectores $x_1,\dots,x_p,y_1,\dots,y_q \in E$, tem-se

$$\xi(y_1,\dots,y_q,x_1,\dots,x_p) = (-1)^{pq}\,\xi(x_1,\dots,x_p,y_1,\dots,y_q).$$

Dem: Pondo $x_{p+j} = y_j$, para $1 \le j \le q$, e sendo $I = \{p+1,\dots,p+q\}$, portanto com $\overline{I} = \{1,\dots,p\}$, concluímos por 5.7 e tendo em conta a fórmula (3) na alínea c) de 5.6, que

$$\xi(y_1,\dots,y_q,x_1,\dots,x_p) = \xi(x_{I_1},\dots,x_{I_p},x_{\overline{I}_1},\dots,x_{\overline{I}_q}) =$$
$$= (-1)^I \times \xi(x_1,\dots,x_n),$$

onde

$$(-1)^I = (-1)^{pq} \times (-1)^{\overline{I}} = (-1)^{pq}. \qquad \square$$

5.9 **(Corolário — Outras caracterizações dos elementos $\det_{\mathcal{B},I}$ na alínea b) de 5.2)** Sejam $n = p+q$, E um espaço vectorial de dimensão n sobre o corpo $\mathbb{K}$, no qual consideramos uma base $\mathcal{B}$ constituída pelos vectores $w_1,\dots,w_n$, e $I \in \mathcal{P}_{n,p}$. Consideremos o correspondente $\overline{I} = \{1,\dots,n\} \setminus I$. Tem-se então que o elemento $\det_{\mathcal{B},I} \in A^n(E;\mathbb{K})$ está definido por

$$\det_{\mathcal{B},I}(x_1,\dots,x_p) = (-1)^I \det_{\mathcal{B}}(x_1,\dots,x_p,w_{\overline{I}_1},\dots,w_{\overline{I}_q}) =$$
$$= (-1)^{\overline{I}} \det_{\mathcal{B}}(w_{\overline{I}_1},\dots,w_{\overline{I}_q},x_1,\dots,x_p).$$

Dem: Provemos a primeira igualdade. Reparemos que se pode considerar um elemento $\xi \in A^p(E;\mathbb{K})$ definido por

$$\xi(x_1,\dots,x_p) = (-1)^I \det_{\mathcal{B}}(x_1,\dots,x_p,w_{\overline{I}_1},\dots,w_{\overline{I}_q}).$$

Precisamos mostrar que ξ verifica as condições que determinam $\det_{\mathcal{B},I}$.
Em primeiro lugar, se $I' \neq I$ em $\mathcal{P}_{n,p}$ existe j tal que $I'_j \notin I$ donde $I'_j = \overline{I}_k$ para algum k e portanto

$$\xi(w_{I'_1},\dots,w_{I'_p}) = (-1)^I \det_{\mathcal{B}}(w_{I'_1},\dots,w_{I'_p},w_{\overline{I}_1},\dots,w_{\overline{I}_q}) = 0.$$

Vemos agora que

$$\xi(w_{I_1},\dots,w_{I_p}) = (-1)^I \det_{\mathcal{B}}(w_{I_1},\dots,w_{I_p},w_{\overline{I}_1},\dots,w_{\overline{I}_q}) =$$
$$= (-1)^I \times (-1)^I \det_{\mathcal{B}}(w_1,\dots,w_n) = 1.$$

A segunda igualdade resulta da primeira, tendo em conta 5.8 e o facto de, pela fórmula (3) na alínea c) de 5.6, ter-se $(-1)^{\overline{I}} = (-1)^{pq} \times (-1)^{I}$. □

5.10 **(O produto exterior)** Consideremos corpos $\mathbb{K}_r \subset \mathbb{K}_c$ e um espaço vectorial E sobre $\mathbb{K}_r$. Dados $\xi \in A^p(E;\mathbb{K}_c)$ e $\eta \in A^q(E;\mathbb{K}_c)$, pode definir-se uma forma multilinear alternada $\xi \wedge \eta \in A^{p+q}(E;\mathbb{K}_c)$, a que se dá o nome de *produto exterior* de ξ e η, por

(1) $$\xi \wedge \eta(x_1,\ldots,x_{p+q}) = \sum_{I\in\mathcal{P}_{p+q,p}} (-1)^I\, \xi(x_{I_1},\ldots,x_{I_p})\, \eta(x_{\overline{I}_1},\ldots,x_{\overline{I}_q}).$$

Além disso, as aplicações

$$A^p(E;\mathbb{K}_c) \times A^q(E;\mathbb{K}_c) \to A^{p+q}(E;\mathbb{K}_c), \quad (\xi,\eta) \mapsto \xi \wedge \eta,$$

são $\mathbb{K}_c$-bilineares e verificam a propriedade de $\pm$-comutatividade

(2) $$\eta \wedge \xi = (-1)^{pq}\, \xi \wedge \eta.$$

Note-se que não afastamos os casos em que $p = 0$ e em que $q = 0$, casos em que a soma em (1) tem uma única parcela e o produto exterior é o produto usual de uma forma multilinear alternada por um escalar em $\mathbb{K}_c$.

Dem: É imediato que a aplicação $\xi \wedge \eta\colon E^{p+q} \to \mathbb{K}_c$ definida no enunciado é multilinear e, para verificarmos que ela é alternada vamos utilizar o critério em 3.15. Consideremos então $i < p+q$ tal que $x_i = x_{i+1}$. Dividimos as parcelas no somatório no segundo membro de (1) em quatro subconjuntos disjuntos:

1) Aquelas em que i e $i+1$ pertencem ambos a I. Essas parcelas são nulas uma vez que se tem então $\xi(x_{I_1},\ldots,x_{I_p}) = 0$.

2) Aquelas em que i e $i+1$ pertencem ambos a $\overline{I}$. Essas parcelas são nulas uma vez que se tem então $\eta(x_{\overline{I}_1},\ldots,x_{\overline{I}_q}) = 0$.

3) Aquelas em que $i \in I$ e $i+1 \in \overline{I}$.

4) Aquelas em que $i \in \overline{I}$ e $i+1 \in I$.

Podemos considerar uma correspondência biunívoca entre conjuntos I nas condições de 3) e conjuntos I nas condições de 4) que associa a cada I nas condições de 3) o conjunto $I' = I \cup \{i+1\} \setminus \{i\}$. Além disso, a parcela correspondente a I nas condições de 3) vem simétrica da parcela correspondente a I' visto que se tem $(-1)^{I'} = -(-1)^I$ e que, sendo $i = I_a$ e $i+1 = \overline{I}_b$ vem $i+1 = I'_a$ e $i = \overline{I'}_b$,[18] assim como $I_t = I'_t$ para cada $t \neq a$ e $\overline{I}_s = \overline{I'}_s$ para cada $s \neq b$, o que implica que

$$\xi(x_{I_1},\ldots,x_{I_p}) = \xi(x_{I'_1},\ldots,x_{I'_p}), \quad \eta(x_{\overline{I}_1},\ldots,x_{\overline{I}_q}) = \eta(x_{\overline{I'}_1},\ldots,x_{\overline{I'}_q}).$$

Deduzimos assim que, sendo $x_i = x_{i+1}$, a soma (1) é efectivamente igual a 0. O facto de as aplicações $\wedge$ serem bilineares é de verificação trivial. Por fim,

[18]Para isso foi importante estarmos a considerar $x_i = x_{i+1}$ e não simplesmente $x_i = x_j$ para um certo $i < j$.

a propriedade de $\pm$-comutatividade em (2) resulta de que se pode considerar uma correspondência biunívoca de $\mathcal{P}_{p+q,p}$ sobre $\mathcal{P}_{p+q,q}$ que a I associa $\overline{I}$ e de que, tendo em conta a fórmula (3) na alínea c) de 5.6, a parcela de $\eta \wedge \xi(x_1, \ldots, x_{p+q})$ correspondente ao complementar $\overline{I}$ é igual à parcela de $\xi \wedge \eta(x_1, \ldots, x_{p+q})$ correspondente a I multiplicada por $(-1)^{pq}$. □

5.11 **(Produto exterior e imagens recíprocas)** No contexto de 5.10, consideremos também um espaço vectorial E' sobre $\mathbb{K}_r$ e uma aplicação linear $\lambda\colon E' \to E$ assim como as correrspondentes aplicações lineares de imagem recíproca. Dados $\xi \in A^p(E;\mathbb{K}_c)$ e $\eta \in A^q(E;\mathbb{K}_c)$, tem-se então

$$\lambda^*(\xi \wedge \eta) = \lambda^*(\xi) \wedge \lambda^*(\eta) \in A^{p+q}(E';\mathbb{K}_c).$$

Dem: Trata-se de uma consequência directa das definições. □

5.12 **(Exemplos de produto exterior) a)** Se $\xi, \eta \in L(E;\mathbb{K}_c) = A^1(E;\mathbb{K}_c)$ vem

$$\xi \wedge \eta(x, y) = \xi(x)\,\eta(y) - \xi(y)\,\eta(x).$$

b) Mais geralmente, se $\xi \in A^1(E;\mathbb{K}_c)$ e $\eta \in A^q(E;\mathbb{K}_c)$, tem-se

$$\xi \wedge \eta(x_1, \ldots, x_{q+1}) = \sum_{i=1}^{q+1} (-1)^{i-1}\,\xi(x_i)\,\eta(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{q+1}).$$

5.13 **(Produto exterior de elementos da base associada)** Consideremos corpos $\mathbb{K}_r \subset \mathbb{K}_c$ e um espaço vectorial E de dimensão n sobre $\mathbb{K}_r$, onde se fixou uma base $\mathcal{B}$ formada pelos vectores $w_1, \ldots, w_n$. Dados $p \leq n$, $q \leq n$, $I \in \mathcal{P}_{n,p}$ e $J \in \mathcal{P}_{n,q}$, tem-se então, para os correspondentes elementos $\det_{\mathcal{B},I} \in A^p(E;\mathbb{K}_c)$ e $\det_{\mathcal{B},J} \in A^q(E;\mathbb{K}_c)$ (cf. a alínea b) de 5.2):

a) Se $I \cap J \neq \emptyset$,

$$\det_{\mathcal{B},I} \wedge \det_{\mathcal{B},J} = 0.$$

b) Se $I \cap J = \emptyset$, seja $R \in \mathcal{P}_{p+q,p}$ o definido por

$$I_1 = (I \cup J)_{R_1}, I_2 = (I \cup J)_{R_2}, \ldots, I_p = (I \cup J)_{R_p},$$ [19]

e portanto

$$J_1 = (I \cup J)_{\overline{R}_1}, J_2 = (I \cup J)_{\overline{R}_2}, \ldots, J_q = (I \cup J)_{\overline{R}_q}.$$

Tem-se então

$$\det_{\mathcal{B},I} \wedge \det_{\mathcal{B},J} = (-1)^R \det_{\mathcal{B},I \cup J}.$$

c) Como caso particular de b), no caso em que $I_p < J_1$,

[19]Ou seja, R é o conjunto dos j em $\{1, \ldots, p+q\}$ tais que $(I \cup J)_j \in I$.

$$\det_{\mathcal{B},I} \wedge \det_{\mathcal{B},J} = \det_{\mathcal{B},I\cup J}.$$

d) (Laplace generalizado escondido com a cauda de fora) Como caso particular de b), tem-se

$$\det_{\mathcal{B},I} \wedge \det_{\mathcal{B},\overline{I}} = (-1)^I \det_{\mathcal{B}}.$$

Dem: Tendo em conta a alínea b) de 5.2, tem-se

$$\textbf{(1)} \qquad \det_{\mathcal{B},I} \wedge \det_{\mathcal{B},J} = \sum_{K\in\mathcal{P}_{n,p+q}} \det_{\mathcal{B},I} \wedge \det_{\mathcal{B},J}(w_{K_1},\dots,w_{K_{p+q}}) \det_{\mathcal{B},K},$$

onde, para cada $K \in \mathcal{P}_{n,p+q}$, tem-se

$$\textbf{(2)} \qquad \begin{aligned} &\det_{\mathcal{B},I} \wedge \det_{\mathcal{B},J}(w_{K_1},\dots,w_{K_{p+q}}) = \\ &= \sum_{S\in\mathcal{P}_{p+q,p}} (-1)^S \det_{\mathcal{B},I}(w_{K_{S_1}},\dots,w_{K_{S_p}}) \det_{\mathcal{B},J}(w_{K_{\overline{S}_1}},\dots,w_{K_{\overline{S}_q}}), \end{aligned}$$

somatório em que a única parcela não necessariamente nula é a correspondente a $S \in \mathcal{P}_{p+q,p}$ para o qual se tenha

$$\begin{aligned} K_{S_1} &= I_1,\dots,K_{S_p} = I_p,\\ K_{\overline{S}_1} &= J_1,\dots,K_{\overline{S}_q} = J_q, \end{aligned}$$

parcela essa que só pode existir no caso em que $I\cap J = \emptyset$ e, nesse caso, apenas quando $K = I\cup J$. Ficou assim justificada a afirmação em a) e vemos que, nas hipóteses de b),

$$\begin{aligned} &\det_{\mathcal{B},I} \wedge \det_{\mathcal{B},J} = \det_{\mathcal{B},I} \wedge \det_{\mathcal{B},J}(w_{(I\cup J)_1},\dots,w_{(I\cup J)_{p+q}}) \det_{\mathcal{B},I\cup J} = \\ &= (-1)^R \det_{\mathcal{B},I}(w_{(I\cup J)_{R_1}},\dots,w_{(I\cup J)_{R_p}}) \det_{\mathcal{B},J}(w_{(I\cup J)_{\overline{R}_1}},\dots,w_{(I\cup J)_{\overline{R}_q}}) \det_{\mathcal{B},I\cup J} \end{aligned}$$

com $R \in \mathcal{P}_{p+q,p}$ definido por

$$I_1 = (I\cup J)_{R_1}, I_2 = (I\cup J)_{R_2},\dots, I_p = (I\cup J)_{R_p},$$

e portanto

$$J_1 = (I\cup J)_{\overline{R}_1}, J_2 = (I\cup J)_{\overline{R}_2},\dots, J_q = (I\cup J)_{\overline{R}_q},$$

donde, finalmente

$$\det_{\mathcal{B},I} \wedge \det_{\mathcal{B},J} = (-1)^R \det_{\mathcal{B},I\cup J}.$$

A conclusão de c) resulta de b), se repararmos que, quando $I_p < J_1$ tem-se $R = \{1,\dots,p\}$. A conclusão de d) resulta de b) já que, no caso em que $J = \overline{I}$, tem-se $I\cup J = \{1,\dots,n\}$ e $R = I$. □

5.14 **(O teorema de Laplace generalizado "relativo às linhas em I" em versão não matricial)** Seja E um espaço vectorial de dimensão $n = p+q$ sobre $\mathbb{K}$, onde se fixou uma base $\mathcal{B}$ formada pelos vectores $w_1,\dots,w_n$.

Dados $I \in \mathcal{P}_{n,p}$ e $x_1, \ldots, x_n \in E$, tem-se

$$\begin{aligned} &\det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n) = \\ &= (-1)^I \sum_{J \in \mathcal{P}_{n,p}} (-1)^J \det_{\mathcal{B},I}(x_{J_1}, \ldots, x_{J_p}) \det_{\mathcal{B},\overline{I}}(x_{\overline{J}_1}, \ldots, x_{\overline{J}_q}). \end{aligned}$$

Dem: Trata-se de uma consequência direta da alínea d) de 5.13, tendo em conta a definição do produto exterior em 5.10. □

5.15 **(Versão matricial do teorema de Laplace generalizado relativo às linhas em *I*)** Seja $n = p + q$, com $p \geq 1$ e $q \geq 1$ e consideremos uma matriz M do tipo $n \times n$ com termos no corpo $\mathbb{K}$. Fixado $I \in \mathcal{P}_{n,p}$, tem-se então, com as notações em 2.1,

$$\det(M) = (-1)^I \sum_{J \in \mathcal{P}_{n,p}} (-1)^J \det\Big(M_J^I\Big) \times \det\Big(M_{\overline{J}}^{\overline{I}}\Big).$$

Dem: Trata-se de uma consequência de 5.14, considerando para E o espaço $\mathbb{K}^n$ com a sua base canónica e para $x_1, \ldots, x_n$ as colunas da matriz M, tendo em conta a interpretação matricial de $\det_{\mathcal{B},I}$ referida em 5.3. □

Vamos agora definir o produto interior de uma forma multilinear alternada por um vector, noção que será especialmente importante como auxiliar na prova da associatividade do produto exterior.

5.16 **(O produto interior)** Consideremos corpos $\mathbb{K}_r \subset \mathbb{K}_c$. Sejam E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}_r$, $p \geq 1$, $\xi \in A^p(E; \mathbb{K}_c)$ e $w \in E$. Define-se então o *produto interior*

$$\widehat{\mathrm{i}}_w(\xi) \in A^{p-1}(E; \mathbb{K}_c)$$

de ξ por w por

$$\widehat{\mathrm{i}}_w(\xi)(x_1, \ldots, x_{p-1}) = \xi(x_1, \ldots, x_{p-1}, w).$$ [20]

Repare-se que é trivial constatar que $\widehat{\mathrm{i}}_w(\xi)$ é efectivamente uma forma multilinear alternada e que, no caso em que $p = 1$, o produto interior $\widehat{\mathrm{i}}_w(\xi) \in A^0(E; \mathbb{K}_c) = \mathbb{K}_c$ é simplesmente $\xi(w)$.
Repare-se que é trivialmente $\mathbb{K}_r$-bilinear a aplicação

$$A^p(E; \mathbb{K}_c) \times E \to A^{p-1}(E; \mathbb{K}_c), \quad (\xi, w) \mapsto \widehat{\mathrm{i}}_w(\xi),$$

sendo mesmo $\mathbb{K}_c$-linear na primeira variável.

---

[20] Trata-se de um produto interior "à direita". Na definição de produto interior que se utiliza com mais frequência w aparece como primeiro argumento no segundo membro, o que corresponde a multiplicar o resultado por $(-1)^{p-1}$.

5.17 **(Relação do produto interior com o produto exterior)** No contexto de 5.10, suponhamos que $p \geq 1$ e $q \geq 1$. Para cada $w \in E$ tem-se então

$$\widehat{\mathrm{i}}_w(\xi \wedge \eta) = \xi \wedge \widehat{\mathrm{i}}_w(\eta) + (-1)^q\, \widehat{\mathrm{i}}_w(\xi) \wedge \eta \in A^{p+q-1}(E;\mathbb{K}_c).$$

Dem: Consideremos $x_1, \ldots, x_{p+q-1}$ arbitrários em E e definamos $x_{p+q} = w$. Vem então

$$\textbf{(1)}\qquad \begin{aligned}&\widehat{\mathrm{i}}_w(\xi \wedge \eta)(x_1, \ldots, x_{p+q-1}) = \xi \wedge \eta(x_1, \ldots, x_{p+q-1}, x_{p+q}) =\\ &= \sum_{I \in \mathcal{P}_{p+q,p}} (-1)^I\, \xi(x_{I_1}, \ldots, x_{I_p})\, \eta(x_{\overline{I}_1}, \ldots, x_{\overline{I}_q}).\end{aligned}$$

O conjunto de índices $\mathcal{P}_{p+q,p}$ é a união disjunta de dois subconjuntos $\mathcal{P}'_{p+q,p}$ e $\mathcal{P}''_{p+q,p}$, o primeiro formado pelos I tais que $p+q \in \overline{I}$, e portanto $p+q = \overline{I}_q$, e o segundo constituído pelos I tais que $p+q \in I$, e portanto $p+q = I_p$. O somatório em (1) é assim igual à soma de dois somatórios: O primeiro é

$$\begin{aligned}&\sum_{I \in \mathcal{P}'_{p+q,p}} (-1)^I\, \xi(x_{I_1}, \ldots, x_{I_p})\, \eta(x_{\overline{I}_1}, \ldots, x_{\overline{I}_q}) =\\ &= \sum_{I \in \mathcal{P}_{p+q-1,p}} (-1)^I\, \xi(x_{I_1}, \ldots, x_{I_p})\, \eta(x_{\overline{I}_1}, \ldots, x_{\overline{I}_{q-1}}, w) =\\ &= \sum_{I \in \mathcal{P}_{p+q-1,p}} (-1)^I\, \xi(x_{I_1}, \ldots, x_{I_p})\, \widehat{\mathrm{i}}_w(\eta)(x_{\overline{I}_1}, \ldots, x_{\overline{I}_{q-1}}) =\\ &= \xi \wedge \widehat{\mathrm{i}}_w(\eta)(x_1, \ldots, x_{p+q-1})\end{aligned}$$

e, quanto ao segundo, se repararmos que se pode considerar uma bijecção de $\mathcal{P}''_{p+q,p}$ sobre $\mathcal{P}_{p+q-1,p-1}$ que a I associa $I' = I \setminus \{p+q\}$ e que se tem então

$$(-1)^I = (-1)^{I'} \times (-1)^{p+q-p} = (-1)^{I'} \times (-1)^q,$$

ele vai ser igual a

$$\begin{aligned}&\sum_{I \in \mathcal{P}''_{p+q,p}} (-1)^I\, \xi(x_{I_1}, \ldots, x_{I_p})\, \eta(x_{\overline{I}_1}, \ldots, x_{\overline{I}_q}) =\\ &= \sum_{I' \in \mathcal{P}_{p+q-1,p-1}} (-1)^q \times (-1)^{I'}\, \xi(x_{I'_1}, \ldots, x_{I'_{p-1}}, w)\, \eta(x_{\overline{I'}_1}, \ldots, x_{\overline{I'}_q}) =\\ &= \sum_{I' \in \mathcal{P}_{p+q-1,p-1}} (-1)^q \times (-1)^{I'}\, \widehat{\mathrm{i}}_w(\xi)(x_{I'_1}, \ldots, x_{I'_{p-1}})\, \eta(x_{\overline{I'}_1}, \ldots, x_{\overline{I'}_q}) =\\ &= (-1)^q\, \widehat{\mathrm{i}}_w(\xi) \wedge \eta(x_1, \ldots, x_{p+q-1}).\end{aligned}$$

□

5.18 **(Associatividade do produto exterior)** Consideremos um corpo $\mathbb{K}_c$ e um subcorpo $\mathbb{K}_r \subset \mathbb{K}_c$. Seja E um espaço vectorial sobre o corpo $\mathbb{K}_r$. Dados $\xi \in A^p(E;\mathbb{K}_c)$, $\eta \in A^q(E;\mathbb{K}_c)$ e $\rho \in A^r(E;\mathbb{K}_c)$, tem-se então

$$(\xi \wedge \eta) \wedge \rho = \xi \wedge (\eta \wedge \rho) \in A^{p+q+r}(E;\mathbb{K}_c),$$

denotando-se também por $\xi\wedge\eta\wedge\rho$ este elemento de $A^{p+q+r}(E;\mathbb{K}_c)$.
Dem: Começamos por notar que da bilinearidade do produto exterior decorre que o resultado é verdadeiro no caso em que algum dos naturais p,q,r é igual a 0. Afastando já esse caso, vamos provar o resultado por indução em $m=p+q+r$. Suponhamos o resultado verdadeiro no caso em que aquela soma é m e provemo-lo no caso em que a soma é $m+1$. Ora, utilizando a hipótese de indução e 5.17, vemos que, para cada $w\in E$, vem

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mathrm{i}}_w\big((\xi\wedge\eta)\wedge\rho\big)=(\xi\wedge\eta)\wedge\widehat{\mathrm{i}}_w(\rho)+(-1)^r\,\widehat{\mathrm{i}}_w(\xi\wedge\eta)\wedge\rho=\\
&=(\xi\wedge\eta)\wedge\widehat{\mathrm{i}}_w(\rho)+(-1)^r\big(\xi\wedge\widehat{\mathrm{i}}_w(\eta)\big)\wedge\rho+(-1)^{r+q}\big(\widehat{\mathrm{i}}_w(\xi)\wedge\eta\big)\wedge\rho=\\
&=\xi\wedge\big(\eta\wedge\widehat{\mathrm{i}}_w(\rho)\big)+(-1)^r\xi\wedge\big(\widehat{\mathrm{i}}_w(\eta)\wedge\rho\big)+(-1)^{r+q}\,\widehat{\mathrm{i}}_w(\xi)\wedge\big(\eta\wedge\rho\big)=\\
&=\xi\wedge\widehat{\mathrm{i}}_w(\eta\wedge\rho)+(-1)^{r+q}\,\widehat{\mathrm{i}}_w(\xi)\wedge\big(\eta\wedge\rho\big)=\widehat{\mathrm{i}}_w\big(\xi\wedge(\eta\wedge\rho)\big),
\end{aligned}$$

o que, tendo em conta a arbitrariedade de $w\in E$, implica trivialmente que

$$(\xi\wedge\eta)\wedge\rho=\xi\wedge(\eta\wedge\rho).\qquad\square$$

5.19 **(Exercício) 1) (Produto interior envolvendo elementos da base associada)** Seja E um espaço vectorial de dimensão n sobre o corpo $\mathbb{K}$, onde se fixou uma base $\mathcal{B}$ formada pelos vectores $w_1,\ldots,w_n$. Sejam $1\le j\le n$, $p\ge 1$ e $I\in\mathcal{P}_{n,p}$. Mostrar que:
a) Se $j\notin I$, vem

$$\widehat{\mathrm{i}}_{w_j}(\det_{\mathcal{B},I})=0.$$

b) Se $j\in I$, sendo k tal que $j=I_k$, vem

$$\widehat{\mathrm{i}}_{w_j}(\det_{\mathcal{B},I})=(-1)^{p-k}\det_{\mathcal{B},I\setminus\{j\}}.$$

c) Em particular, no caso em que $j=I_p$, vem

$$\widehat{\mathrm{i}}_{w_j}(\det_{\mathcal{B},I})=\det_{\mathcal{B},I\setminus\{j\}}.$$

§6. O teorema de Hamilton–Cayley

6.1 **(Valores próprios e equação característica)** Sejam E um espaço vectorial de dimensão n sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $\lambda\colon E\to E$ uma aplicação linear. Recordemos que se diz que um escalar $t\in\mathbb{K}$ é um *valor próprio* de λ se existir um vector $w\neq 0$ em E tal que $\lambda(w)=tw$ ou seja, se a aplicação linear

$$\lambda-t\,Id_E\colon E\to E$$

não for injectiva, ou, o que é o mesmo, não for um isomorfismo. Tendo em conta a alínea c) de 4.14, constatamos que t é um valor próprio de λ se, e só se,

(1) $$\det(\lambda - t\, Id_E) = 0,$$

condição a que se dá o nome de *equação característica* do endomorfismo linear $\lambda: E \to E$.

Uma propriedade fundamental da equação característica é a de que o primeiro membro de (1) é uma função polinomial de t com grau n. Uma vez que não queremos afastar o caso em que o corpo dos escalares possa ser finito, caso em que há vários polinómios a definir uma mesma função polinomial, vamos definir explicitamente um polinómio ao qual se dará o nome de polinómio característico do endomorfismo linear λ, provando-se em seguida que a aplicação polinomial associada a este é a pretendida.

6.2 **(Os coeficientes C_p^λ)** Sejam E um espaço vectorial de dimensão n sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $\lambda: E \to E$ uma aplicação linear. Para cada $0 \le p \le n$, definimos um coeficiente $C_p^\lambda \in \mathbb{K}$ como sendo o traço da aplicação linear "imagem recíproca",

$$\lambda^*_{n-p}: A^{n-p}(E;\mathbb{K}) \to A^{n-p}(E;\mathbb{K}).$$

Como casos particulares, tem-se

$$C_n^\lambda = 1, \quad C_{n-1}^\lambda = \mathrm{Tr}(\lambda), \quad C_0^\lambda = \det(\lambda)$$

(no primeiro caso λ_0^* é a identidade de $\mathbb{K}$, no segundo caso atendemos à alínea c) de 2.9 e no terceiro caso à alínea b) de 2.9 e à definição do determinante em 4.11).

6.3 **(Caracterização matricial dos C_p^λ)** No contexto de 6.2, consideremos em E uma base $\mathcal{B}$ constituída pelos vectores $w_1, \ldots, w_n$ e seja M a matriz de λ nesta base, definida assim por

$$\lambda(w_i) = \sum_{1 \le j \le n} M_i^j\, w_j.$$

Considerando, para cada $I \in \mathcal{P}_{n,n-p}$, a matriz M_I^I de tipo $(n-p) \times (n-p)$ que se obtém de M retirando-lhe as linhas que não estão em I e as colunas que não estão em I (cf. 2.1), tem-se então

$$C_p^\lambda = \sum_{I \in \mathcal{P}_{n,n-p}} \det{}_{\mathcal{B},I}\big(\lambda(w_{I_1}), \ldots, \lambda(w_{I_{n-p}})\big) = \sum_{I \in \mathcal{P}_{n,n-p}} \det(M_I^I)$$

(as parcelas deste último somatório são os *menores principais* de ordem $n-p$ da matriz M).

Dem: Considerando a base de $A^{n-p}(E;\mathbb{K})$ constituída pelos $\det_{\mathcal{B},I}$ (cf. a alínea b) de 5.2), sabemos que se tem

$$\begin{aligned}\lambda^*_{n-p}(\det_{\mathcal{B},I}) &= \sum_{J\in\mathcal{P}_{n,n-p}} \lambda^*_{n-p}(\det_{\mathcal{B},I})(w_{J_1},\dots,w_{J_{n-p}})\det_{\mathcal{B},J} = \\ &= \sum_{J\in\mathcal{P}_{n,n-p}} \det_{\mathcal{B},I}\big(\lambda(w_{J_1}),\dots,\lambda(w_{J_{n-p}})\big)\det_{\mathcal{B},J}\end{aligned}$$

pelo que o traço de λ^*_{n-p} é dado por

$$C^\lambda_p = \mathrm{Tr}(\lambda^*_{n-p}) = \sum_{I\in\mathcal{P}_{n,n-p}} \det_{\mathcal{B},I}\big(\lambda(w_{I_1}),\dots,\lambda(w_{I_{n-p}})\big).$$

Resta-nos reparar que, como referido em 5.3,

$$\det_{\mathcal{B},I}\big(\lambda(w_{I_1}),\dots,\lambda(w_{I_{n-p}})\big) = \det(M^I_I).$$ □

6.4 **(Os coeficientes $\boldsymbol{C^M_p}$)** Motivados por 6.3, dados uma matriz M do tipo $n\times n$ com termos em $\mathbb{K}$ e $0\le p\le n$ definimos o coeficiente $C^M_p\in\mathbb{K}$ por

$$C^M_p = \sum_{I\in\mathcal{P}_{n,n-p}} \det(M^I_I).$$

O que se verificou em 6.3 diz-nos que, no caso em que temos uma aplicação linear $\lambda\colon E\to E$, com E espaço vectorial de dimensão n sobre $\mathbb{K}$, e em que M é a matriz de tipo $n\times n$ de λ relativamente a uma certa base de E tem-se

$$C^\lambda_p = C^M_p.$$

Em particular, dada uma matriz M de tipo $n\times n$ com termos em $\mathbb{K}$, tem-se

$$C^M_p = C^\lambda_p,$$

onde $\lambda\colon\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^n$ é a aplicação linear que tem M como matriz na base canónica.

6.5 **(Propriedades elementares dos coeficientes $\boldsymbol{C^M_p}$) a)** Dada uma matriz M de tipo $n\times n$ com termos em $\mathbb{K}$ com matriz transposta M^T, tem-se, para cada $0\le p\le n$,

$$C^{M^T}_p = C^M_p.$$

b) Consideremos corpos $\mathbb{K}_r\subset\mathbb{K}_c$. Se M é uma matriz de tipo $n\times n$ com termos em $\mathbb{K}_r$ então os coeficientes C^M_p não se alteram quando passarmos a considerá-la como matriz com termos em $\mathbb{K}_c$, em particular, nesta última situação, tem-se $C^M_p\in\mathbb{K}_r$.

Dem: a) Tendo em conta a propriedade do determinante em 4.10, temos uma consequência da definição e de se ter, para cada $I\in\mathcal{P}_{n,n-p}$,

$$\big(M^I_I\big)^T = (M^T)^I_I.$$

b) Trata-se de uma consequência directa da definição, tendo em conta a propriedade do determinante em 4.9. □

6.6 **(Os coeficientes C_p^λ no contexto dual)** Consideremos corpos $\mathbb{K}_r \subset \mathbb{K}_c$. Seja E um espaço vectorial de dimensão n sobre o corpo $\mathbb{K}_r$ e consideremos o correspondente espaço $L(E;\mathbb{K}_c)$ sobre $\mathbb{K}_c$. Dada uma aplicação $\mathbb{K}_r$-linear $\lambda\colon E \to E$, com a aplicação $\mathbb{K}_c$-linear $\lambda^*\colon L(E;\mathbb{K}_c) \to L(E;\mathbb{K}_c)$ correspondente, tem-se então

$$C_p^{\lambda^*} = C_p^\lambda$$

para cada $0 \le p \le n$.
Dem: Basta reparar que, como se verificou em 2.7, sendo M a matriz de λ numa certa base de E, a matriz de λ^* na base associada de $L(E;\mathbb{K}_c)$ é a matriz transposta M^T. □

6.7 **(Invariância por isomorfismo)** Sejam E e $\widehat{E}$ dois espaços vectoriais de dimensão n sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $\mu\colon E \to \widehat{E}$ um isomorfismo. Para cada aplicação linear $\lambda \in L(E;E)$ podemos então considerar a aplicação linear

$$\widehat{\lambda} = \mu \circ \lambda \circ \mu^{-1} \in L(\widehat{E};\widehat{E})$$

e tem-se

$$C_p^{\widehat{\lambda}} = C_p^\lambda$$

para cada $0 \le p \le n$.
Dem: Basta atender a que, se considerarmos uma base $w_1, \ldots, w_n$ de E, a matriz de λ nessa base coincide com a matriz de $\widehat{\lambda}$ na base $\mu(w_1), \ldots, \mu(w_n)$ de $\widehat{E}$. □

6.8 **(O polinómio característico duma aplicação linear)** Sejam E um espaço vectorial de dimensão n sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $\lambda\colon E \to E$ uma aplicação linear. Vamos chamar *polinómio característico* de λ ao polinómio mónico de grau n

$$P^\lambda = T^n + P_{n-1}^\lambda T^{n-1} + \cdots + P_p^\lambda T^p + \cdots + P_1^\lambda T + P_0^\lambda,$$

onde, para cada $0 \le p \le n$,

$$P_p^\lambda = (-1)^{n-p}\, C_p^\lambda \in \mathbb{K}.$$

Tem-se assim, em particular, na sequência do referido em 6.2,

$$P_n^\lambda = 1, \quad P_{n-1}^\lambda = -\mathrm{Tr}(\lambda), \quad P_0^\lambda = (-1)^n \det(\lambda).$$

Uma propriedade essencial do polinómio característico é o facto da a aplicação polinomial associada ser aquela que a $t \in \mathbb{K}$ associa o determinante $\det(t\, Id_E - \lambda)$. Para estabelecermos essa propriedade teremos necessidade do lema a seguir, que envolve o valor das formas multilineares alternadas quando cada argumento é uma soma de duas parcelas.

6.9 **(A fórmula da soma para formas multilineares alternadas)** Consideremos corpos $\mathbb{K}_r \subset \mathbb{K}_c$. Sejam E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}_r$, $n \geq 1$ e $\xi \in A^n(E;\mathbb{K}_c)$. Dados $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$ e $y_1, y_2, \ldots, y_n \in E$ tem-se então

$$\xi(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n) = \\ = \sum_{0\leq p\leq n} \sum_{I\in\mathcal{P}_{n,p}} (-1)^I\, \xi(x_{I_1}, \ldots, x_{I_p}, y_{\overline{I}_1}, \ldots, y_{\overline{I}_{n-p}}).$$ [21]

Dem: No caso em que $n = 1$, tem-se $\xi(x_1 + y_1) = \xi(x_1) + \xi(y_1)$, que é precisamente a fórmula do enunciado, com $\xi(x_1)$ a corresponder à parcela com $p = 1$ e $I = \{1\}$ e $\xi(y_1)$ a correspondente à parcela com $p = 0$ e $I = \emptyset$. Vamos mostrar o resultado por indução, para que supomos o resultado verdadeiro para formas multilineares alternadas de grau n e consideramos $\xi \in A^{n+1}(E;\mathbb{K}_c)$. Tem-se então, aplicando a hipótese de indução aos elementos $\widehat{\mathrm{i}}_{x_{n+1}}(\xi)$ e $\widehat{\mathrm{i}}_{y_{n+1}}(\xi)$ de $A^n(E;\mathbb{K}_c)$,

$$\begin{aligned}
&\xi(x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n, x_{n+1}+y_{n+1}) = \\
&= \xi(x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n, x_{n+1}) + \xi(x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n, y_{n+1}) = \\
&= \sum_{0\leq p\leq n} \sum_{I\in\mathcal{P}_{n,p}} (-1)^I\, \xi(x_{I_1}, \ldots, x_{I_p}, y_{\overline{I}_1}, \ldots, y_{\overline{I}_{n-p}}, x_{n+1}) + \\
\textbf{(1)}\quad &\quad + \sum_{0\leq p\leq n} \sum_{I\in\mathcal{P}_{n,p}} (-1)^I\, \xi(x_{I_1}, \ldots, x_{I_p}, y_{\overline{I}_1}, \ldots, y_{\overline{I}_{n-p}}, y_{n+1}) = \\
&= \sum_{0\leq p\leq n} \sum_{I\in\mathcal{P}_{n,p}} (-1)^I \times (-1)^{n-p}\, \xi(x_{I_1}, \ldots, x_{I_p}, x_{n+1}, y_{\overline{I}_1}, \ldots, y_{\overline{I}_{n-p}}) + \\
&\quad + \sum_{0\leq p\leq n} \sum_{I\in\mathcal{P}_{n,p}} (-1)^I\, \xi(x_{I_1}, \ldots, x_{I_p}, y_{\overline{I}_1}, \ldots, y_{\overline{I}_{n-p}}, y_{n+1}).
\end{aligned}$$

Se $I \in \mathcal{P}_{n,p}$, denotemos $I' = I \cup \{n+1\} \in \mathcal{P}_{n+1,p+1}$, para o qual se tem

$$(-1)^{I'} = (-1)^I \times (-1)^{n-p}, \quad x_{n+1} = x_{I'_{p+1}},$$

e denotemos por I'' o conjunto I considerado como elemento de $\mathcal{P}_{n+1,p}$, para o qual se tem

$$(-1)^{I''} = (-1)^I, \quad y_{n+1} = y_{\overline{I''}_{n+1-p}}.$$

Reescrevendo o último membro de (1), vem assim

[21] De facto, o resultado também é trivialmente verdadeiro para $n = 0$.

$$
\begin{aligned}
&\xi(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n,x_{n+1}+y_{n+1}) =\\
&=\sum_{0\le p\le n}\ \sum_{I\in\mathcal{P}_{n,p}} (-1)^{I'}\,\xi(x_{I'_1},\dots,x_{I'_p},x_{I'_{p+1}},y_{\overline{I'}_1},\dots,y_{\overline{I'}_{n+1-(p+1)}}) +\\
&\quad+\sum_{0\le p\le n}\ \sum_{I\in\mathcal{P}_{n,p}} (-1)^{I''}\,\xi(x_{I''_1},\dots,x_{I''_p},y_{\overline{I''}_1},\dots,y_{\overline{I''}_{n-p}},y_{\overline{I''}_{n+1-p}})
\end{aligned}
$$

ou ainda, mudando variáveis,

$$
\begin{aligned}
&\xi(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n,x_{n+1}+y_{n+1}) =\\
&=\sum_{1\le q\le n+1}\ \sum_{I'\in\mathcal{P}'_{n+1,q}} (-1)^{I'}\,\xi(x_{I'_1},\dots,x_{I'_{q-1}},x_{I'_q},y_{\overline{I'}_1},\dots,y_{\overline{I'}_{n+1-q}}) +\\
&\quad+\sum_{0\le p\le n}\ \sum_{I''\in\mathcal{P}''_{n+1,p}} (-1)^{I''}\,\xi(x_{I''_1},\dots,x_{I''_p},y_{\overline{I''}_1},\dots,y_{\overline{I''}_{n-p}},y_{\overline{I''}_{n+1-p}}),
\end{aligned}
$$

onde denotamos por $\mathcal{P}'_{n+1,q}$ a parte de $\mathcal{P}_{n+1,q}$ constituída pelos I' tais que $n+1\in I'$ (automaticamente com $q\neq 0$) e $\mathcal{P}''_{n+1,p}$ a parte de $\mathcal{P}_{n+1,p}$ constituída pelos I'' tais que $n+1\notin I''$ (automaticamente com $p\neq n+1$). Concluímos daqui que se tem efectivamente

$$
\begin{aligned}
&\xi(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n,x_{n+1}+y_{n+1}) =\\
&\sum_{0\le p\le n+1}\ \sum_{I\in\mathcal{P}_{n+1,p}} (-1)^{I}\,\xi(x_{I_1},\dots,x_{I_p},y_{\overline{I}_1},\dots,y_{\overline{I}_{n+1-p}}).
\end{aligned}
$$ □

6.10 **(Propriedade fundamental do polinómio característico)** Sejam E um espaço vectorial de dimensão n sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $\lambda\colon E\to E$ uma aplicação linear e consideremos o polinómio respetivo característico

$$P^\lambda = T^n + P^\lambda_{n-1}T^{n-1} + \cdots + P^\lambda_p T^p + \cdots + P^\lambda_1 T + P^\lambda_0,$$

definido em 6.8. Tem-se então que a aplicação polinomial associada verifica

(1) $$P^\lambda(t) = \det(t\,Id_E - \lambda),$$

para cada $t\in\mathbb{K}$.
Repare-se que, no caso particular em que o corpo $\mathbb{K}$ é infinito, o polinómio característico é o único polinómio com coeficientes em $\mathbb{K}$ que verifica (1).
Dem: Consideremos uma base $\mathcal{B}$ de E constituída pelos vectores $w_1,\dots,w_n$. Vem, tendo em conta 6.9 e a caracterização de $\det_{\mathcal{B},I}$ em 5.9,

$$\begin{aligned}
&\det(t\,Id_E - \lambda) = \det_{\mathcal{B}}\big(t\,w_1 - \lambda(w_1), \ldots, t\,w_n - \lambda(w_n)\big) = \\
&= \sum_{0\le q\le n}\ \sum_{I\in\mathcal{P}_{n,q}} (-1)^I \det_{\mathcal{B}}\big(-\lambda(w_{I_1}), \ldots, -\lambda(w_{I_q}), t\,w_{\overline{I}_1}, \ldots, t\,w_{\overline{I}_{n-q}}\big) = \\
&= \sum_{0\le q\le n}\ \sum_{I\in\mathcal{P}_{n,q}} (-1)^I \times (-1)^q\, t^{n-q} \det_{\mathcal{B}}\big(\lambda(w_{I_1}), \ldots, \lambda(w_{I_q}), w_{\overline{I}_1}, \ldots, w_{\overline{I}_{n-q}}\big) = \\
&= \sum_{0\le q\le n}\ \sum_{I\in\mathcal{P}_{n,q}} (-1)^q\, t^{n-q} \det_{\mathcal{B},I}(\lambda(w_{I_1}), \ldots, \lambda(w_{I_q})\big).
\end{aligned}$$

Uma vez que, como referido em 6.3, tem-se

$$\det_{\mathcal{B},I}\big(\lambda(w_{I_1}), \ldots, \lambda(w_{Iq})\big) = \det(M_I^I),$$

onde M é a matriz de λ na base $\mathcal{B}$, deduzimos da fórmula obtida atrás e da caracterização dos coeficientes C_p^λ em 6.3 que

$$\det(t\,Id_E - \lambda) = \sum_{0\le q\le n} (-1)^q\, t^{n-q}\, C_{n-q}^\lambda = \sum_{0\le p\le n} P_p^\lambda\, t^p. \qquad \square$$

6.11 **(O polinómio característico de uma matriz)** Tal como em 6.8, dada uma matriz M de tipo $n\times n$ com termos no corpo $\mathbb{K}$, define-se o *polinómio característico* de M como sendo o polinómio mónico de grau n

$$P^M = T^n + P_{n-1}^M T^{n-1} + \cdots + P_p^{M\lambda} T^p + \cdots + P_1^M T + P_0^M,$$

onde, para cada $0\le p\le n$,

$$P_p^M = (-1)^{n-p}\, C_p^M \in \mathbb{K}$$

e resulta de 6.4 que, se E é um espaço vectorial de dimensão n sobre $\mathbb{K}$ e $\lambda\colon E\to E$ é uma aplicação linear, o polinómio característico de λ coincide com o polinómio característico da sua matriz numa base arbitrária de E.
Além disso, já que, para cada $t\in\mathbb{K}$, a matriz de $t\,Id_E - \lambda$ é $t\,\mathcal{I}_n - M$, concluímos que a aplicação polinomial associada está definida por

$$P^M(t) = \det(t\,\mathcal{I}_n - M).$$

6.12 **(Casos particulares) a)** No caso em que E tem dimensão 0, a única aplicação linear $\lambda\colon E\to E$ tem como polinómio característico o polinómio constante 1.
b) No caso em que E tem dimensão 1, a aplicação linear $\lambda\colon E\to E$ está definida por $\lambda(x) = ax$ para um certo $a\in\mathbb{K}$ e o polinómio característico P^λ é

$$P^\lambda = T - a = T - \mathrm{Tr}(\lambda) = T - \det(\lambda).$$

c) No caso em que E tem dimensão 2, tem-se

$$P^\lambda = T^2 - \mathrm{Tr}(\lambda)\,T + \det(\lambda).$$

Abstemo-nos de enunciar as propriedades do polinómio característico que decorrem trivialmente das propriedades dos coeficientes C_p^λ e C_p^M enunciadas de 6.5 a 6.7. Examinamos agora outras propriedades do polinómio característico que não são consequência directa de propriedades já examinadas dos respectivos coeficientes. Para o primeiro resultado será cómodo começar por estabelecer uma versão particular, em que se exige a hipótese suplementar de o corpo envolvido ser infinito, para poder utilizar, em vez do polinómio característico, a aplicação polinomial associada. Provaremos depois a versão geral com um argumento que se baseia no facto de todo o corpo ser um subcorpo de um corpo infinito.

6.13 **(Lema do subespaço invariante)** Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita sobre um **corpo infinito** $\mathbb{K}$ e $F \subset E$ um subespaço vectorial e consideremos o espaço vectorial quociente $\frac{E}{F}$.[22]
Seja $\lambda\colon E \to E$ uma aplicação linear tal que $\lambda(F) \subset F$ e consideremos a correspondente aplicação linear $\widehat{\lambda}\colon \frac{E}{F} \to \frac{E}{F}$ definida por passagem ao quociente. Tem-se então, para as funções polinomiais associadas aos polinómios característicos,

(1) $$P^\lambda(t) = P^{\lambda_{/F}}(t) \times P^{\widehat{\lambda}}(t),$$

para cada $t \in \mathbb{K}$, e portanto, como polinómios,

(2) $$P^\lambda = P^{\lambda_{/F}} \times P^{\widehat{\lambda}}.$$

Dem: Uma propriedade básica do produto de polinómios diz-nos que

$$(P^{\lambda_{/F}} \times P^{\widehat{\lambda}})(t) = P^{\lambda_{/F}}(t) \times P^{\widehat{\lambda}}(t)$$

para cada $t \in \mathbb{K}$ e portanto, uma vez que $\mathbb{K}$ é infinito, concluímos que, para provar (2), será suficiente estabelecer a igualdade (1) para cada $t \in \mathbb{K}$. Ora, tendo em conta 4.21, e uma vez que $(t\,Id_E - \lambda)(F) \subset F$, vem

$$\begin{aligned} P^\lambda(t) &= \det(t\,Id_E - \lambda) = \det(t\,Id_F - \lambda_{/F}) \times \det(t\,Id_{\frac{E}{F}} - \widehat{\lambda}) = \\ &= P^{\lambda_{/F}}(t) \times P^{\widehat{\lambda}}(t). \end{aligned}$$ □

6.14 **(Polinómio característico de uma matriz com um bloco de zeros)** Sejam $\mathbb{K}$ um corpo, finito ou infinito, $n = p + q$ e M uma matriz do tipo $n \times n$ admitindo uma decomposição em blocos da forma

[22] A hipótese de o corpo $\mathbb{K}$ ser infinito será dispensada adiante em 6.15.

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix},$$

onde a matriz A é do tipo $p \times p$, a matriz de zeros é do tipo $p \times q$, a matriz B é do tipo $q \times p$ e a matriz C é do tipo $q \times q$. Tem-se então que o polinómio característico da matriz M é o produto dos polinómios característicos das matrizes A e C.

Dem: Consideremos um corpo infinito $\overline{\mathbb{K}}$ tendo $\mathbb{K}$ como subcorpo, por exemplo o corpo das frações racionais com coeficientes em $\mathbb{K}$. Tendo em conta a alínea b) de 6.5, os polinómios característicos de M, de A e de C não se alteram se passarmos a encarar estas matrizes como matrizes com termos em $\overline{\mathbb{K}}$. Consideremos agora um espaço vectorial E de dimensão $p+q$ sobre $\overline{\mathbb{K}}$ onde se fixou uma base $w_1, \ldots, w_{p+q}$ (por exemplo $\overline{\mathbb{K}}^{p+q}$ com a base canónica), seja $F \subset E$ o subespaço vectorial de dimensão q gerado pelos vectores $w_{p+1}, \ldots, w_{p+q}$ e consideremos no espaço vectorial quociente $\frac{E}{F}$ a base $[w_1]_F, \ldots, [w_p]_F$. Sendo $\lambda\colon E \to E$ a aplicação linear cuja matriz na base considerada é M, tem-se $\lambda(F) \subset F$, a matriz de $\lambda_{/F}\colon F \to F$ na base $w_{p+1}, \ldots, w_{p+q}$ é C e a matriz da aplicação linear obtida por passagem ao quociente $\widehat{\lambda}\colon \frac{E}{F} \to \frac{E}{F}$ na base considerada neste espaço é A pelo que concluímos, por aplicação do lema 6.13, que

$$P^M = P^\lambda = P^{\lambda_{/F}} \times P^{\widehat{\lambda}} = P^C \times P^A. \qquad \square$$

6.15 **(Polinómio característico na presença de um subespaço invariante)** Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita sobre um corpo finito ou infinito $\mathbb{K}$ e $F \subset E$ um subespaço vectorial e consideremos o espaço vectorial quociente $\frac{E}{F}$.

Seja $\lambda\colon E \to E$ uma aplicação linear tal que $\lambda(F) \subset F$ e consideremos a correspondente aplicação linear $\widehat{\lambda}\colon \frac{E}{F} \to \frac{E}{F}$, definida por passagem ao quociente. Tem-se então, para os polinómios característicos,

$$P^\lambda = P^{\lambda_{/F}} \times P^{\widehat{\lambda}}.$$

Dem: Consideremos uma base $w_1, \ldots, w_{p+q}$ de E tal que $w_{p+1}, \ldots, w_{p+q}$ seja uma base de F e lembremos que $[w_1]_F, \ldots, [w_p]_F$ é uma base $\frac{E}{F}$. O facto de se ter $\lambda(F) \subset F$ implica que a matriz M de λ na base considerada de E admite uma decomposição em blocos da forma

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix},$$

onde C é a matriz de $\lambda_{/F}\colon F \to F$ e A a de $\widehat{\lambda}\colon \frac{E}{F} \to \frac{E}{F}$ nas bases referidas. Podemos assim concluir, por 6.14, que

$$P^\lambda = P^M = P^C \times P^A = P^{\lambda_{/F}} \times P^{\widehat{\lambda}}. \qquad \square$$

6.16 **(Lema do vector cíclico)** Sejam E um espaço vectorial de dimensão n sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $\lambda\colon E \to E$ uma aplicação linear. Diz-se que um vector $w \in E$ é λ-*cíclico* se os vectores

$$w, \lambda(w), \lambda^2(w), \dots, \lambda^{n-1}(w)$$

constituirem uma base de E. Supondo que $w \in E$ é λ-cíclico podemos considerar os escalares $b_0, b_1, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{K}$ definidos por

$$\lambda^n(w) = b_0\, w + b_1\, \lambda(w) + \cdots + b_{n-1}\, \lambda^{n-1}(w)$$

e então o polinómio característico de λ é

$$P^\lambda = T^n - \sum_{0 \le p \le n-1} b_p\, T^p.$$

Dem: Denotemos por $\mathcal{B}$ a base $w_1, \dots, w_n$ de E definida por $w_k = \lambda^{k-1}(w)$, em particular $w_1 = w$, tendo-se assim $\lambda(w_k) = w_{k+1}$, para $k \le n-1$, e

$$\lambda(w_n) = b_0\, w_1 + b_1\, w_2 + \cdots + b_{n-1}\, w_n.$$

Calculemos agora os coeficientes C_p^λ para cada $0 \le p \le n$. Já sabemos que $C_n^\lambda = 1$ pelo que supomos agora que $0 \le p < n$. Vimos em 6.3 que

$$C_p^\lambda = \sum_{I \in \mathcal{P}_{n,n-p}} \det_{\mathcal{B},I}\big(\lambda(w_{I_1}), \dots, \lambda(w_{I_{n-p}})\big)$$

e daqui deduzimos, tendo em conta a segunda caracterização de $\det_{\mathcal{B},I}$ em 5.9, que

$$C_p^\lambda = \sum_{I \in \mathcal{P}_{n,n-p}} (-1)^{\overline{I}} \det_{\mathcal{B}}\big(w_{\overline{I}_1}, \dots, w_{\overline{I}_p}, \lambda(w_{I_1}), \dots, \lambda(w_{I_{n-p}})\big).$$

Para cada $I \in \mathcal{P}_{n,n-p}$ tal que exista $i \in I$ com $i+1 \in \overline{I}$, a parcela correspondente no somatório precedente é igual a 0, uma vez que $\lambda(w_i) = w_{i+1}$ aparece em dois argumentos distintos. Deduzimos daqui que apenas uma parcela do somatório referido não é necessariamente nula, nomeadamente aquela com $I = \{p+1, \dots, n\}$, para o qual $\overline{I} = \{1, \dots, p\}$, e portanto $(-1)^{\overline{I}} = 1$, pelo que concluímos que

$$\begin{aligned}
C_p^\lambda &= \det_{\mathcal{B}}\big(w_1, \dots, w_p, \lambda(w_{p+1}), \dots, \lambda(w_n)\big) = \\
&= \det_{\mathcal{B}}\big(w_1, \dots, w_p, w_{p+2}, \dots, w_n, b_0\, w_1 + b_1\, w_2 + \cdots + b_{n-1}\, w_n\big) = \\
&= \sum_{0 \le k \le n-1} b_k \det_{\mathcal{B}}\big(w_1, \dots, w_p, w_{p+2}, \dots, w_n, w_{k+1}\big).
\end{aligned}$$

Mais uma vez, no somatório anterior só a parcela com $k = p$ pode ser não nula visto que em todas as outras w_{k+1} aparece em dois argumentos. Obtemos assim

$$\begin{aligned} C_p^\lambda &= b_p \det_{\mathcal{B}}(w_1, \ldots, w_p, w_{p+2}, \ldots, w_n, w_{p+1}) = \\ &= (-1)^{n-(p+1)}\, b_p \det_{\mathcal{B}}(w_1, \ldots, w_n) = (-1)^{n-(p+1)}\, b_p \end{aligned}$$

donde, finalmente, para os coeficientes do polinómio característico, $P_n^\lambda = 1$ e, para $0 \le p < n$,

$$P_p^\lambda = (-1)^{n-p}\, C_p^\lambda = -b_p. \qquad \square$$

6.17 **(Corolário — Lema de Hamilton–Cayley)** Sejam E um espaço vectorial de dimensão n sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $\lambda\colon E \to E$ uma aplicação linear com polinómio característico

$$P^\lambda = T^n + P_{n-1}^\lambda T^{n-1} + \cdots + P_p^\lambda T^p + \cdots + P_1^\lambda T + P_0^\lambda$$

(cf. 6.8) e consideremos a aplicação linear

$$P_\lambda(\lambda) = \lambda^n + P_{n-1}^\lambda \lambda^{n-1} + \cdots + P_p^\lambda \lambda^p + \cdots + P_1^\lambda \lambda + P_0^\lambda Id_E \colon E \to E.$$

Se $w \in E$ for um vector λ-cíclico tem-se

$$P_\lambda(\lambda)(w) = 0.$$

Dem: Tendo em conta 5.16, sendo

$$\lambda^n(w) = b_0\, w + b_1\, \lambda(w) + \cdots + b_{n-1}\, \lambda^{n-1}(w),$$

tem-se $P_p^\lambda = -b_p$ para cada $0 \le p \le n-1$ pelo que

$$\begin{aligned} P_\lambda(\lambda)(w) &= \lambda^n(w) + \sum_{p=0}^{n-1} P_p^\lambda\, \lambda^p(w) = \\ &= \lambda^n(w) - \sum_{p=0}^{n-1} b_p\, \lambda^p(w) = 0. \end{aligned} \qquad \square$$

6.18 **(Teorema de Hamilton–Cayley)** Sejam E um espaço vectorial de dimensão n sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $\lambda\colon E \to E$ uma aplicação linear com polinómio característico definido por

$$P^\lambda = T^n + P_{n-1}^\lambda T^{n-1} + \cdots + P_p^\lambda T^p + \cdots + P_1^\lambda T + P_0^\lambda.$$

Tem-se então

$$P_\lambda(\lambda) = \lambda^n + P_{n-1}^\lambda \lambda^{n-1} + \cdots + P_p^\lambda \lambda^p + \cdots + P_1^\lambda \lambda + P_0^\lambda Id_E = 0.$$

Dem: Vamos demonstrar o resultado por indução completa na dimensão n de E. O caso em que $n = 0$ é trivial e o caso em que $n = 1$ resulta de que, como referido na alínea b) de 6.12, sendo $\lambda(x) = ax$, tem-se $P_\lambda = T - a$, donde

$$P_\lambda(\lambda) = \lambda - a\, Id_E = \lambda - \lambda = 0.$$

Suponhamos que, para um certo $n \geq 2$, o resultado é verdadeiro no caso em que E tem dimensão menor que n e provemo-lo no caso em que temos uma aplicação linear $\lambda: E \to E$ com E de dimensão n. Suponhamos, por absurdo que se tinha $P_\lambda(\lambda) \neq 0$ e escolhamos $w \in E$ tal que $P_\lambda(\lambda)(w) \neq 0$. Tendo em conta 6.17, w não é λ-cíclico, por outras palavras o sistema

$$w, \lambda(w), \lambda^2(w), \ldots, \lambda^{n-1}(w)$$

não é uma base de E, e portanto é linearmente dependente. Consideremos agora $0 \leq p < n-1$ o maior natural tal que

(1) $$w, \lambda(w), \ldots, \lambda^p(w)$$

seja linearmente independente e seja $F \subset E$ o subespaço vectorial de dimensão $p+1 < n$ gerado por estes vectores. O facto de

$$w, \lambda(w), \ldots, \lambda^p(w), \lambda^{p+1}(w)$$

ser linearmente dependente implica que $\lambda^{p+1}(w) \in F$. Deduzimos daqui que λ aplica cada elemento da base (1) de F em F, e portanto $\lambda(F) \subset F$. Pela hipótese de indução, tem-se $P_{\lambda_{/F}}(\lambda_{/F}) = 0$ em $L(F;F)$ e resulta diretamente da definição da imagem de um endomorfismo linear por um polinómio que $P_{\lambda_{/F}}(\lambda_{/F})$ coincide com a restrição a F de $P_{\lambda_{/F}}(\lambda)$, o que implica, em particular, que $P_{\lambda_{/F}}(\lambda)(w) = 0$. Mas, tendo em conta 6.15, sendo $\widehat{\lambda}: \frac{E}{F} \to \frac{E}{F}$ a aplicação linear obtida por passagem ao quociente de λ, tem-se

$$P_\lambda = P_{\lambda_{/F}} \times P_{\widehat{\lambda}}$$

o que implica, uma vez que o morfismo de avaliação é um morfismo unitário de álgebras, que se tem

$$P_\lambda(\lambda)(w) = P_{\widehat{\lambda}} \circ P_{\lambda_{/F}}(\lambda)(w) = P_{\widehat{\lambda}}\big(P_{\lambda_{/F}}(\lambda)(w)\big) = P_{\widehat{\lambda}}(0) = 0,$$

o que é absurdo, tendo em conta a escolha de w com $P_\lambda(\lambda)(w) \neq 0$. $\square$

6.19 **(Versão matricial do teorema de Hamilon–Cayley)** Seja M uma matriz do tipo $n \times n$ de elementos de um corpo $\mathbb{K}$ e consideremos o seu polinómio característico

$$P^M = T^n + P^M_{n-1}T^{n-1} + \cdots + P^{M\lambda}_p T^p + \cdots + P^M_1 T + P^M_0$$

(cf. 6.11). Tem-se então

$$P^M(M) = M^n + P^M_{n-1}M^{n-1} + \cdots + P^{M\lambda}_p M^p + \cdots + P^M_1 M + P^M_0 \mathcal{I} = 0.$$

Dem: Consideremos um espaço vectorial E de dimensão n sobre o corpo $\mathbb{K}$ munido de uma base $w_1, \ldots, w_n$, por exemplo $E = \mathbb{K}^n$ com a base canónica, e seja $\lambda\colon E \to E$ a aplicação linear que tem M como matriz. A conclusão resulta então do teorema de Hamilton–Cayley em 6.18 se repararmos que M^p é a matriz de λ^p e que $P_p^M = P_p^\lambda$. □

6.20 **(Exercícios) 1)** Sejam E um espaço vectorial de dimensão $n \geq 1$ sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $\lambda\colon E \to E$ uma aplicação linear tal que $\det(\lambda) \neq 0$. Utilizar o teorema de Hamilton–Cayley para mostrar que existe um polinómio P de grau $n-1$ (que, em geral, dependerá de λ) tal que $\lambda^{-1} = P(\lambda)$.

2) (Comparar com a alínea b) de 4.9 e lembrar a respetiva conclusão) Consideremos um corpo $\mathbb{K}$ e um subanel unitário $\mathbb{A} \subset \mathbb{K}$. Sejam $n \geq 1$ e M uma matriz do tipo $n \times n$ com termos em $\mathbb{A}$. Utilizar a versão matricial do teorema de Hamilton–Cayley para mostrar que se $\det(M)$ for um elemento invertível de $\mathbb{A}$ então a matriz inversa M^{-1} também tem termos em $\mathbb{A}$. Mostrar também que, reciprocamente, se M for invertível e com M^{-1} com os termos em $\mathbb{A}$ então $\det(M)$ é um elemento invertível de $\mathbb{A}$.[23]

[23]Como exemplo concreto, uma matriz M de termos inteiros admite uma inversa também com termos inteiros se, e só se, $\det(M) = \pm 1$.

Índice de Símbolos

Índice Remissivo

Bibliografia

[1] Axler, Sheldon, *Linear Algebra Done Right*, Springer, 2015.

[2] Cartan, Henri, *Formes Différentielles*, Hermann, Paris, 1967.

[3] Godbillon, Claude, *Géométrie Différentialle et Mécanique Analytique*, Hermann, Paris 1969.

[4] Halmos, Paul R., *Finite–Dimensional Vector Spaces*, Springer, New York, 1987.

[5] Katznelson, Yitzhac e Katznelson, Yonatan, *A (Terse) Introduction to Linear Algebra*, A.M.S., 2007.

[6] Lang, Serge, *Algebra*, Ed. 3, Addison–Wesley, 1993.

[7] Lang, Serge, *Linear Algebra*, Springer, New York, 1987.

[8] Lima, Elon Lages, *Álgebra Exterior*, IMPA, Rio de Janeiro, 2005.

[9] Lima, Elon Lages, *Álgebra Linear*, IMPA, Rio de Janeiro, 2003.

[10] Santana, Ana Paula e Queiró, João Filipe, *Introdução à Álgebra Linear*, Gradiva, Lisboa, 2010.

[11] Shafarevich, Igor R. e Remozov, Alexey O., *Linear Algebra and Geometry*, Springer, Berlim, 2013.

[12] Spivak, M., *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol. I, Publish or Perish, Berkeley, 1979.