SUR LE SUPRÊMUM D'UNE FAMILLE DE RELATIONS D'ÉQUIVALENCE

PAR

A. ALMEIDA COSTA

1) **Introduction** — D'une indication donnée par Tiago de Oliveira dans [1], page 17, on tire un procédé théorique simple pour le calcul du suprêmum d'une famille de relations d'équivalence. La justification de ce calcul, faite dans le théorème 1, est un des buts de cette petite note.

La terminologie employée est celle qui se trouve dans les livres consacrés à la theorie des treillis, tels que [2] ou [3].

En particuliér, le symbole $\gtreqless$ est le symbole de relation dans un ensemble partiellement ordonné.

Le théorème 2 se trouve en [1], page 17, tandis que le théorème 3, bien que connu, est démontré d'une façon élégante à l'aide des sous groupes $\mathfrak{g}$, cités dans le théorème 1.

Le théorème 4, est une proposition intéréssante, aussi sur des relations d'équivalence, qui peuvent toujours être prises par des relations de congruence.

Dans les §§ 5 et 6, nous donnerons quelques propositions semblables à celles qu'on peut trouver en [1], pages 27 et 28.

Les démonstrations sont, pourtant, justifiées si l'on se rappele que nous nous bornons à des relations d'équivalence, pendant que dans [1], on parle toujours de systèmes algébriques et on pose toujours l'hypothèse de passer d'un invariant à un invariant dans tout homomorphisme de systémes semblables.

2) **Relations d'équivalence dans un ensemble**—Étant donné un ensemble $\mathfrak{C}=\{a,b,\ldots,x,\ldots\}$, nous designons par $\mathfrak{G}=\{A,\ldots,H,\ldots,S,T,\ldots\}$ son groupe de transformations. Un sous-groupe $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{G}$, nous permet de partager $\mathfrak{C}$ en classes disjointes d'équivalence de la forme:

$$\{a\mathfrak{g}, b\mathfrak{g},\ldots,c\mathfrak{g},\ldots,f\mathfrak{g},\ldots\}=\mathfrak{C}', \qquad (1)$$

qui sont, généralement, désignées par domaines de transitivité de $\mathfrak{C}$. Réciproquement, considérons une relation d'équivalence en $\mathfrak{C}$ et la respective partition en classes d'équivalence: $\{C_a, C_b,\ldots\}$. On peut toujours déterminer un sous-groupe $\mathfrak{g}$, de $\mathfrak{G}$, tel que $C_a=a\mathfrak{g}$, $C_b=b\mathfrak{g}$, etc.... Il suffit, par exemple, de prendre pour $\mathfrak{g}_1$ le sous-groupe engendré par les transpositions qui changent, soit deux éléments de C_a, soit deux éléments de C_b, etc.... Compte tenue de l'existence de sous-groupes de $\mathfrak{G}$ qui ne sont pas engendrés par les transpositions, nous pouvons conclure qu'il peut y avoir sous-groupes différents, $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$, tels que $a\mathfrak{g}_1=a\mathfrak{g}_2$, pour chaque $a\in\mathfrak{C}$.

Malgré cela, l'emploi des sous-groupes $\mathfrak{g}$, dans le sens que nous venons de signaler, se montre avantageux dans certaines questions de lesquelles nous allons nous occuper.

Nous partirons du treillis complet $R(\mathfrak{C})$, des relations possibles en $\mathfrak{C}$.

Nous savons que la partie $E(\mathfrak{C})$, de $R(\mathfrak{C})$, formée par les relations d'équivalence en $\mathfrak{C}$, contient la relation 1, et aussi l'infimum de toute famille d'éléments $\rho_\alpha\in E(\mathfrak{C})$, en supposant l'infimum calculé dans le treillis $R(\mathfrak{C})$. Ce fait s'exprime en disant que $E(\mathfrak{C})$ est sous-treillis d'infimum de $R(\mathfrak{C})$.

Cependant $E(\mathfrak{C})$ n'est pas sous-treillis de suprêmum si l'on prenne cette locution dans un sens analogue à celui de l'antérieur. Il s'ensuit que $E(\mathfrak{C})$, étant un treillis complet, n'est pas un sous-treillis complet de $R(\mathfrak{C})$.

Dans le § suivant, en employant les sous-groupes $\mathfrak{g}$, on indique précisément un procédé de calcul du suprêmum d'une famille d'éléments de $E(\mathfrak{C})$.

3) **Sur le treillis des relations d'équivalence**—Prenons donc, en $E(\mathfrak{C})$, une famille $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$ et associons à chaque ρ_α un sous-groupe $\mathfrak{g}_\alpha$, comme nous avons fait au § antérieur. Le suprêmum $\bigcup\rho_\alpha$ désiré, se forme par le:

Théorème 1: *Le suprêmum $\bigcup\rho_\alpha$, de la famille $\{\rho_\alpha\}$, de relations d'equivalence en $\mathfrak{C}$, est obtenu en prennant la relation d'équivalence σ définie par le sous-groupe $\mathfrak{g}=\bigcup\mathfrak{g}_\alpha$, engendré par une famille $\{\mathfrak{g}_\alpha\}$ de sous-groupes associés aux ρ_α.*

Il est certain que, si $b\in a\mathfrak{g}_\alpha$, on a aussi $b\in a\mathfrak{g}$, quel que soit α. C'est ainsi que nous pouvons affirmer qu'on a $\rho_\alpha\leqq\sigma$, dans le treillis $E(\mathfrak{C})$, dont l'existence est connue. D'autre côté, en supposant $\rho_\alpha\leqq\tau\in E(\mathfrak{C})$, pour tous les $\alpha\alpha$, nous allons voir qu'on a aussi $\sigma\leqq\tau$.

En effet, si $\mathfrak{h}$ est associé à τ, on a $a\mathfrak{g}_\alpha\subseteqq a\mathfrak{h}$, quels que soient $a\in\mathfrak{C}, \alpha\in A$. Dans ces conditions, si $g_{\alpha_i}\in\mathfrak{g}_{\alpha_i}$, il s'ensuit que:

$$a g_{\alpha_1}\ldots g_{\alpha_i}\in a g_{\alpha_1}\ldots g_{\alpha_{i-1}}\mathfrak{h}\subseteqq a g_{\alpha_1}\ldots g_{\alpha_{i-2}}\mathfrak{h}\,\mathfrak{h}=$$
$$=a g_{\alpha_1}\ldots g_{\alpha_{i-2}}\mathfrak{h}\subseteqq\ldots\subseteqq a\mathfrak{h},$$

pour tout le produit fini $g_{\alpha_2}\ldots g_{\alpha_i}$. On peut en conclure $a\mathfrak{g}\subseteqq a\mathfrak{h}$, ou $\sigma\leqq\tau$. Le théorème est démontré.

Corolaire 1: *Si ρ et σ sont des relations d'équivalence tels que $\rho\leqq\sigma$ et si $\mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{g}$ sont sous-groupes respectivement associés aux mêmes relations, on a $a\mathfrak{g}=a(\mathfrak{g}_0\cup\mathfrak{g})$, quel que soit $a\in\mathfrak{C}$.*

4) **Application aux systèmes algébriques**—Dans ce § nous admettrons que $\mathfrak{C}$ est support d'un système algébrique $\mathfrak{S}=(\mathfrak{C}/\Omega,\Omega^*)$ avec un domaine Ω d'opérateurs et un domaine Ω^* d'opérations binaires. Cela veut dire que, en supposant $\Omega=\{\lambda,\mu,\ldots\}$ et $\Omega^*=\{\lambda^*,\tau^*,\ldots\}$, on a $a\lambda\in\mathfrak{S}$, $a\lambda^* b=c\in\mathfrak{S}$, $(a,b\in\mathfrak{S})$.

Étant donnée une relation de congruence ρ, introduite en $\mathfrak{S}$, on forme le système ou espace quotient $\mathfrak{S}/\rho = \{C_a, C_b, \ldots\}$, avec les mêmes opérateurs et opérations, en posant:

$$C_a\lambda = C_{a\lambda}, \quad C_a\lambda^* C_b = C_{a\lambda^* b}.$$

Les classes C_a, C_b, etc. sont obtenues en considérant ρ comme une simple relation d'équivalence.

Nous pouvons associer à ρ, un ou plusieurs sous-groupes $\mathfrak{g}$, du groupe $\mathfrak{G}$ de transformations de $\mathfrak{C}$, de façon que $C_a = a\mathfrak{g}$, $C_b = b\mathfrak{g}$, etc.. Mais, inversement, un sous-groupe $\mathfrak{g}$, de $\mathfrak{G}$, n'amène pas à un ensemble (1) qui soit, en général, un système algébrique homomorphe à $\mathfrak{S}$.

Lorsqu'on part de ρ, tout $\mathfrak{g}$ associé vérifie les conditions:

$$(a\mathfrak{g})\lambda = C_a\lambda = C_{a\lambda} = (a\lambda)\mathfrak{g},$$

$$(a\mathfrak{g})\lambda^*(b\mathfrak{g}) = C_a\lambda^* C_b = C_{a\lambda^* b} = (a\lambda^* b)\mathfrak{g},$$

de façon que, en représentant par ω l'application $a \to a\omega$, de $\mathfrak{S}$ en $\mathfrak{S}$, définie par l'une ou l'autre des correspondances

$$a \to a\lambda = a\omega, \quad a \to a\lambda^* b = a\omega, \quad a \to b\lambda^* a = a\omega,$$

on en conclut:

$$(a\mathfrak{g})\omega \subseteqq (a\omega)\mathfrak{g}. \tag{2}$$

La condition (2) caractérise déjà, inversement, les classes (1) comme classes de congruence.

C'est ce que nous allons voir. Supposons $y \in x\mathfrak{g}$. Alors, $y\lambda \in (x\mathfrak{g})\lambda \subseteqq (x\lambda)\mathfrak{g}$, soit $y\lambda \in (x\lambda)\mathfrak{g}$. Ensuite, si $y \in x\mathfrak{g}, z \in t\mathfrak{g}$, on a $y\lambda^* z = y\omega \in (x\mathfrak{g})\omega \subseteqq (x\omega)\mathfrak{g} = (x\lambda^* z)\mathfrak{g}$, ainsi que $x\lambda^* z = z\omega \in (t\mathfrak{g})\omega \subseteqq (t\omega)\mathfrak{g} = (x\lambda^* t)\mathfrak{g}$, ce qui donne: $y\lambda^* z \in (x\lambda^* t)\mathfrak{g}$. Nous préciserons, en disant:

Théorème 2: *Dans chaque système algébrique $\mathfrak{S} = \mathfrak{C}/\Omega, \Omega^*)$, à chaque congruence ρ on peut associer un ou plus groupes $\mathfrak{g}$, sous-groupes du groupe de transformations du support $\mathfrak{C}$, de telle façon que $(x\mathfrak{g})\omega \subseteqq (x\omega)\mathfrak{g}$; et, inversement, chaque sous-groupe $\mathfrak{g}$ qui satisfait à l'inclusion antérieur définie une congruence en $\mathfrak{S}$.*

Étudions maintenant l'ensemble $C(\mathfrak{S})$, des relations de congruence, comme une partie du treillis $E(\mathfrak{C})$, ou bien $E(\mathfrak{S})$, des relations d'équivalence. Dans ce sens-là, nous allons voir que le suprêmum $\sigma = \bigcup \rho_\alpha$, d'une famille de congruences, prises comme des relations d'équivalence, est une relation de congruence. Posons $\mathfrak{g}_s = \bigcup \mathfrak{g}_\alpha$, où les $\mathfrak{g}_\alpha$ s'associent aux ρ_α. Pour $g \in \mathfrak{g}_s$, si on a $g = g_{\alpha_1} \ldots g_{\alpha_i}$, on voit que:

$$(xg)\omega = x g_{\alpha_1} \ldots g_{\alpha_i}\omega = x g_{\alpha_1} \ldots g_{\alpha_{i-1}} \omega g'_{\alpha_i} =$$
$$= x g_{\alpha_1} \ldots g_{\alpha_{i-2}} \omega g'_{\alpha_{i-1}} g'_{\alpha_i} = \ldots = x\omega g'_{\alpha_1} \ldots g'_{\alpha_i} \in (x\omega)\mathfrak{g}_s,$$

car $g'_{\alpha_i} \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}$, etc. Par là, il s'ensuit l'inclusion $(x\mathfrak{g}_s)\omega \subseteqq (x\omega)\mathfrak{g}_s$, qui est dans les conditions (2). La relation σ est une congruence. Les raisonnements faits prouvent que $C(\mathfrak{S})$ est un sous-treillis de suprêmum de $E(\mathfrak{C})$. D'ailleurs, est bien connue la proposition:

Théorème 3: *Les congruences $C(\mathfrak{S})$ forment un treillis complet, qui est sous-treillis complet de $E(\mathfrak{S}) = E(\mathfrak{C})$.*

Une relation d'équivalence ρ conduit à l'espace quotient $\mathfrak{C}' = \{a\mathfrak{g}, b\mathfrak{g}, \ldots, f\mathfrak{g}, \ldots\}$. $\mathfrak{h}$ étant le sous-groupe de $\mathfrak{G}$ engendré par tous les sous-groupes de $\mathfrak{G}$ amenant au même espace quotient $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{h}$ est bien déterminé. Considérons ensuite $\mathfrak{C}$ comme un espace algébrique avec le domaine operatoire $\Omega = \mathfrak{Q} \subseteqq \mathfrak{G}$, $\mathfrak{Q}$ etant un ensemble quelconque de transformations appartenant à $\mathfrak{G}$, et avec un domaine d'opérations binaires formant un ensemble vide $\Omega^* = \phi$. Alors, ρ étant donné, il existe un domaine opératoire maximum $\mathfrak{Q} = \mathfrak{R}$, composé par la totalité des transformations pour lesquelles $\mathfrak{C}' = \mathfrak{C}/\rho$ est une partition de $\mathfrak{C}$ en des classes de congruence. $\mathfrak{R}$ est bien déterminé et contient une partie $\mathfrak{H}$ qui applique des classes distinctes en des classes distinctes. $\mathfrak{H}$ est aussi bien déterminé et forme un sous-groupe de $\mathfrak{G}$, comme nous allons le voir.

Si $S \in \mathfrak{H}$, on doit avoir $(a\mathfrak{g})S \subseteqq (aS)\mathfrak{g}$, plus précisément, car S est une transformation, $(a\mathfrak{g})S = (aS)\mathfrak{g}$. Si on a aussi $T \in \mathfrak{H}$, alors:

$$(a\mathfrak{g})(ST) = ((a\mathfrak{g})S)T = ((aS)\mathfrak{g})T = (aST)\mathfrak{g}.$$

D'autre côté, de $(a\mathfrak{g})S = (aS)\mathfrak{g}$, on conclut:

$$(aS^{-1}\mathfrak{g})S = a\mathfrak{g}, \quad \text{ou} \quad (aS^{-1})\mathfrak{g} = (a\mathfrak{g})S^{-1}.$$

Il s'ensuit que $\mathfrak{H}$ est sous-groupe, comme nous l'avons dit.

Les éléments de $\mathfrak{H}$ induisent des transformations en $\mathfrak{C}'$, qui forment un sous-groupe $\mathfrak{H}'$, homomorphe de $\mathfrak{H}$, contenu dans le groupe $\mathfrak{G}'$, de transformations de $\mathfrak{C}'$. Le noyau de cet homomorphisme est précisément $\mathfrak{h}$. Il s'ensuit le

Théorème 4: *Une relation d'équivalence ρ, dans un ensemble $\mathfrak{C}$, avec un groupe $\mathfrak{G}$ de transformations, est une relation de congruence relativement à un sous-groupe maximum $\mathfrak{H}$, de $\mathfrak{G}$. Les éléments de $\mathfrak{H}$ induisent le groupe de transformations $\mathfrak{H}'$, de l'espace quotient $\mathfrak{C}' = \mathfrak{C}/\rho$. Le noyau de l'homomorphisme $\mathfrak{H} \sim \mathfrak{H}'$ est le sous-groupe $\mathfrak{h}$ engendré par tous les sous-groupes de $\mathfrak{G}$ qui amènent à la même partition en classes d'équivalence.*

Remarquons que, en supposant $\mathfrak{g}$ un invariant de $\mathfrak{G}$, la relation d'équivalence correspondante est une relation de congruence relativement à $\mathfrak{G}$. On a alors $\mathfrak{H} = \mathfrak{R} = \mathfrak{g}$. Donc:

Corolaire 2: *Si $\mathfrak{g}$ est un invariant du groupe $\mathfrak{G}$, il existe un invariant $\mathfrak{h}$, de $\mathfrak{G}$, intermédiaire entre $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{G}$, tel que $\mathfrak{G}/\mathfrak{h}$ donne une réalisation d'un groupe de transformations de l'ensemble $\mathfrak{C}' = \{a\mathfrak{g}, b\mathfrak{g}, \ldots\}$.*

Quel que soit le sous-groupe $\mathfrak{g}$, le sous-groupe $\mathfrak{H}$ contient $\mathfrak{g}$, ainsi que le normalisateur de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{G}$. Inversement, en prenant arbitrairement un sous-groupe $\mathfrak{G}_0$, de $\mathfrak{G}$, il est toujours un domaine opératoire relatif à une congruence définie par $\mathfrak{g}$ = groupe unité, $\mathfrak{g} = \mathfrak{G}_0$, ou $\mathfrak{g} = \mathfrak{G}$.

5) **Sur le suprêmum d'une chaîne de relations d'équivalence obtenue par un certain type d'itération** — Considérons un ensemble quelconque, ainsi que les possibles relations d'équivalence ρ; ensuite définissons l'application $\rho \to \Phi(\rho)$, amenant d'une équivalence à une autre équivalence du même ensemble. Il nous sera utile de remarquer le cas cans lequel Φ a les propriétés suivantes:

I) $\rho \leqq \Phi(\rho)$;

II) si $\rho \leqq \sigma$, on a $\Phi(\rho) \leqq \Phi(\sigma)$.

Alors, nous allons construire la chaîne suivante de relations d'équivalence, obtenues par itération transfinie de Φ, en partant de ρ:

$$\rho = \Phi_0(\rho) \leqq \Phi(\rho) = \Phi_1(\rho) \leqq \Phi(\Phi_1(\rho)) = \Phi_2(\rho) \leqq \ldots \tag{3}$$

Lorsque s est un ordinal limite, on écrit: $\Phi_s(\rho) = \bigcup_{k<s} \Phi_k(\rho)$; et, ne l'étant pas, on pose $\Phi_s(\rho) = \Phi(\Phi_{s-1}(\rho))$. Le suprêmum que nous voulons construire est celui de toute la chaîne (3). Nous commencerons par une

Observation — Prenons deux ensembles $\mathfrak{C}'$ et $\mathfrak{C}''$, pas équipotents, et supposons que la cardinalité γ', du premier, est inférieure à la cardinalité γ'' du second. Quel que soit la manière d'obtenir une bonne ordonnation pour $\mathfrak{C}'$ et une autre pour $\mathfrak{C}''$, de façon à avoir deux ordinaux $\mathfrak{B}'$ et $\mathfrak{B}''$, ce sera $\mathfrak{B}'$ qui est isomorphe à un idéal, (propre) de $\mathfrak{B}''$ [2, pages 35]. Si, en effet, $\mathfrak{B}''$ était isomorphe à un idéal de $\mathfrak{B}'$, alors $\mathfrak{C}'$ et $\mathfrak{C}''$ seraient équipotents.

On peut ajouter d'autres remarques complémentaires, qui nous ameneront facilement à l'énnoncé du théorème 5. Si $\mathfrak{C}'$ et $\mathfrak{C}''$ sont équipotents, il peut y avoir de bonnes ordonnations pour lesquelles $\mathfrak{B}'$ soit isomorphe à un idéal propre de $\mathfrak{B}''$, d'autres pour lesquelles soit le contraire qui arrive, d'autres encore pour lesquelles $\mathfrak{B}'$ et $\mathfrak{B}''$ soient isomorphes. D'une façon plus précise, un ensemble $\mathfrak{C}$ de cardinalité infinie $\mathfrak{S}$ étant donné, dans les ordinaux relatifs aux possibles bonnes ordonnations distinctes de $\mathfrak{C}$, il y a un premier élement $\mathfrak{B}(\mathfrak{C})$. Tous les ordinaux en question précèdent le premier élément relatif aux bonnes ordonnations possibles d'un ensemble $\mathfrak{C}'$, de cardinalité $\gamma'>\gamma$. Si nous prenons $\mathfrak{B}(\mathfrak{C}')$, soit $\mathfrak{B}'$ un ordinal pour lequel $\mathfrak{B}(\mathfrak{C})<\mathfrak{B}'<(\mathfrak{C}')$. Si on admet qu'aucun cardinal n'existe entre γ et γ', tous les ordinaux $\mathfrak{B}'$ ont la cardinalité γ. L'ordinal $\mathfrak{B}(\mathfrak{C}')$ est un ordinal limite, car s'il était sucésseur d'un ordinal de cardinalité γ, sa cardinalité serait γ également. On a ce

Théorème 5: *À chaque cardinalité infinie γ correspond une famille bien ordonnée d'ordinaux, tous avec la cardinalité γ. Le premier élément de la famille est un ordinal limite.*

L'observation étant faite, revenons à la chaîne (3) et à l'ensemble $\mathfrak{C}$ dans lequel nous avons pris la relation d'équivalence citée. La chaîne s'arrête, lorsqu'il y a deux relations consécutives égales. Dans touts les cas, la cardinalité des éléments distincts de (3) est inférieure à la cardinalité des sous-ensembles de l'ensemble des relations possibles de $\mathfrak{C}$. Cela nous montre que dans (3), la construction transfinie des relations distinctes s'arrête. Le suprêmum de toutes les relations de la chaîne (3) est une relation $\Phi_l(\rho)$, appartenant aussi à (3).

On a:

$$\Phi_{l+1}(\rho)=\Phi(\Phi_l(\rho))=\Phi_l(\rho). \tag{4}$$

L'ordinal l est le premier ordinal, indice en (3), pour lequel (4) a lieu ; et la constrution du suprêmum $\Phi_l(\rho)$ peut se faire d'une façon théoriquement simple.

L'application Φ étant donnée, désignons par $\overline{\Phi}$ l'application $\rho\to\overline{\Phi}(\rho)=\Phi_l(\rho)$. Nous allons voir que $\overline{\Phi}$ coïncide avec l'application $\tilde{\Phi}$, définie de la manière suivante:

On écrit

$$\tilde{\Phi}(\sigma)=\bigcap\sigma_j,\ \text{où les } \sigma_j \text{ sont toutes les relations } \sigma\leqq\sigma_j,\ \text{pour lesquelles } \Phi(\sigma_j)=\sigma_j. \tag{5}$$

En effet, étant $\rho\leqq\rho_j$, avec $\Phi(\rho_j)=\rho_j$, on voit que:

$\Phi(\rho)=\Phi_1(\rho)\leqq\Phi(\rho_j)=\rho_j$, $\Phi(\Phi_1(\rho))\leqq\rho_j$, etc.... Il se démontre, par induction transfinie, que $\Phi_l(\rho)\leqq\rho_j$. On a donc:

$$\Phi_l(\rho)\leqq\bigcap\rho_j=\tilde{\Phi}(\rho).$$

Inversement $\tilde{\Phi}(\rho)\leqq\sigma$, si $\rho\leqq\sigma$ et $\Phi(\sigma)=\sigma$. Or on peut supposer $\sigma=\Phi_l(\rho)$. Il en résulte, comme on l'a dit,

$$\tilde{\Phi}(\rho)=\overline{\Phi}(\rho)=\Phi_l(\rho).$$

On peut donc énnoncer le théorème suivant:

Théorème 6: *Une famille de relations d'équivalence dans un ensemble étant donnée, soit Φ une application définie dans cette famille. Alors, sous les deux hypothèses suivantes:*

I) $\rho\leqq\Phi(\rho)$,

II) $\rho\leqq\sigma$ *implique* $\Phi(\rho)\leqq\Phi(\sigma)$;

on peut affirmer que le suprêmum des relations de la chaîne (3), est la relation $\tilde{\Phi}(\rho)$, obtenue par l'application $\sigma\to\tilde{\Phi}(\sigma)$, définie comme il suit: $\tilde{\Phi}(\sigma)=\bigcap\sigma_j$, pour tous les σ_j tels que $\sigma\leqq\sigma_j$, $\Phi(\sigma_j)=\sigma_j$.

Il est bien simple de prouver que $\tilde{\Phi}$ jouit des propriétés I) et II) citées dans l'énoncé que nous vennons de donner. Par ex.: si $\rho_1 \leqq \rho_2$, c'est $\tilde{\Phi}(\rho_1) \leqq \tilde{\Phi}(\rho_2)$, parce que tout le ρ_j qui entre dans la définition de $\tilde{\Phi}(\rho_2)$ entre aussi dans la définition de $\tilde{\Phi}(\rho_1)$.

6) **Sur les relations d'équivalence quotients**—Dans un ensemble $\mathfrak{C}$, définissons une relation d'équivalence ρ, et, après, supposant $\rho \leqq \sigma$, considérons l'équivalence quotient σ/ρ. Il nous importe la proposition suivante:

Théorème 7: *Si nous supposons* $\rho \leqq \sigma_j$, *pour tous les* $j\,j$ *d'une famille, on a* $\bigcap(\sigma_j/\rho)=(\bigcap\sigma_j)/\rho$. Prennons $\mathfrak{C}/\rho = \{C_a, C_b, \ldots\}$. En acceptant que $C_a[\bigcap(\sigma_j/\rho)]C_b$, on a $C_a\sigma_j/\rho C_b$, de façon que $a\sigma_j b$, ainsi que $a(\bigcap\sigma_j)b$, $C_a[(\bigcap\sigma_j)/\rho]C_b$. Inversement, de $C_a[(\bigcap\sigma_j)/\rho]C_b$, on déduit $a(\bigcap\sigma_j)b$, par conséquent $a\sigma_j b$, $C_a\sigma_j/\rho C_b$, $C_a[\bigcap(\sigma_j/\rho)]C_b$.

C'est de même avantageux d'avoir présent le résultat que nous allons maintenant ennoncer:

Théorème 8: *Sous les hypothèses* $\rho \leqq \sigma, \rho \leqq \tau, \sigma/\rho = \tau/\rho$, *l'égalité* $\sigma = \tau$ *est valable.* En effet, de $a\sigma b$, on conclut $C_a\sigma/\rho C_b$, soit $C_a\tau/\rho C_b$, donc, précisement, $a\tau b$.

Si l'on suppose en outre que l'application Φ du théorème 6 est définie, dans les mêmes conditions, pour chaque ensemble $\mathfrak{C}/\rho$, et qu'elle possède la nouvelle propriété:

III) $\rho \leqq \sigma$ entraîne $\Phi(\sigma/\rho)=\Phi(\sigma)/\rho$,

on peut donner ce

Théorème 9: *L'application* $\tilde{\Phi}$ *a la propriété III), si* Φ *jouit de la même propriété.* Nous voulons prouver l'égalité $\tilde{\Phi}(\sigma)/\rho = \tilde{\Phi}(\sigma/\rho)$, si $\rho \leqq \sigma$. Or $\tilde{\Phi}(\sigma)/\rho = (\bigcap\sigma_j)/\rho$, pour les σ_j

cités en (5), tandis que $\tilde{\Phi}(\sigma/\rho) = \bigcap(\sigma_\alpha/\rho)$, pour touts les σ_α/ρ tels que $\sigma/\rho \leqq \sigma_\alpha/\rho, \Phi(\sigma_\alpha/\rho)=\sigma_\alpha/\rho$. Comme $\bigcap(\sigma_\alpha/\rho)=(\bigcap\sigma_\alpha)/\rho$, nous devrons prouver l'égalité $(\bigcap\sigma_j)/\rho=(\bigcap\sigma_\alpha)/\rho$.

Pour cela, nous montrerons que tout le σ_j est un σ_α, et que tout le σ_α est un σ_j. Un σ_j est un σ_α, puisque

$$\sigma/\rho \leqq \sigma_j/\rho, \Phi(\sigma_j/\rho)=\Phi(\sigma_j)/\rho=\sigma_j/\rho.$$

Réciproquement, un σ_α est un σ_j, comme nous allons voir. En fait, on a $\Phi(\sigma_\alpha/\rho)=\Phi(\sigma_\alpha)/\rho=\sigma_\alpha/\rho$, par conséquent $\Phi(\sigma_\alpha)=\sigma_\alpha$, en vertue du théorème 8.